

Kurven und Tiefe

Dörte Haftendorn

Zusammenfassung. Kurven bieten eine Fülle von Möglichkeiten für vertieftes mathematisches Arbeiten. Dieser Aufsatz konzentriert sich auf die *bipolaren Kurven*, zu denen nicht nur die Cassini'schen Kurven, sondern auch Ellipsen, Hyperbeln und allgemeinere Descartes'sche Kurven gehören. Durch ihre einfache Konstruktion sind Erkundungen schon für junge Lernende mit geringen Konstruktionserfahrungen unter Einsatz von GeoGebra möglich. Besonderes Verständnis der beobachteten Formen wird unterstützt durch die Darstellung der Konstruktionsbedingungen in einem simultanen zweiten Grafikfenster. Dieses ermöglicht auch, eigene bipolare Kurven mit selbst geplanten Eigenschaften zu erfinden.

Einleitung

Das Thema *Kurven* ist wunderbar reichhaltig, aber nicht nur wegen der schönen Bilder und vielfältigen Formen. In besonderem Maße reicht es auch „tief“ in die Mathematik, ermöglicht so viele mathematische Überlegungen, Betrachtungen, Beweise, Rechnungen und Kreuz-und-quer-Bezüge, dass kein Ende abzusehen ist.



Abb. 1: Barockes Haus und Barockgarten mit Antikensammlung und Landschaftspark

Mir kommt es so vor, als öffne man im Haus der Mathematik ein Fenster, blicke in einen barocken Garten mit einer Antikensammlung und vielerlei Beeten, auf denen Blumen mit illustren Namen gedeihen. Von jedem Beet führt mindestens ein Pfad in den freien „englischen“ Mathematik-Landschaftsgarten, in dem es zu jeder bekannten Blumenfamilie offenere Definitionen (Biologen sagen eher Züchtungen) gibt, die viele Überraschungen und allerlei unvermutete Verwandtschaften bieten.

Dieses „Wunder“ ist mir erst so richtig zum Bewusstsein gekommen, als ich an dem Buch „Kurven erkunden und verstehen“ (Haftendorn 2017) gearbei-

tet habe. Wie der Titel sagt, geht es dabei um das *Erkunden* der Vielfalt in eigener Regie und das *Verstehen* der Zusammenhänge unter Einsatz von mathematischem Ideenreichtum und Handwerk. Der Fokus des vorliegenden Beitrags liegt auf den bipolaren Kurven. Sie bieten auch Gelegenheit, das vertiefte Verstehen durch die Nutzung zweier Grafikfenster zu unterstützen.¹

Barocke Blüten und Früchte: Bipolare Kurven

Die antike Strenge der Renaissance löst sich in der Architektur der Barockzeit in Bögen, geschwungenen Formen, Spiralornamenten und elliptischen Fenstern auf. Mathematiker und kreative Laien widmeten sich den antiken Kurven, verallgemeinerten² sie und erfanden neue Kurven.

Definition der bipolaren Kurven

Gegeben seien zwei Pole E und E' , oft auch *Brennpunkte* genannt, im Abstand $\overline{EE'} = 2e$. Jeder Punkt der Ebene hat von E einen Abstand r und von E' einen Abstand r' . Jede Gleichung mit r und r' definiert eine *bipolare Kurve* als Menge aller Punkte, die die Gleichung erfüllen.

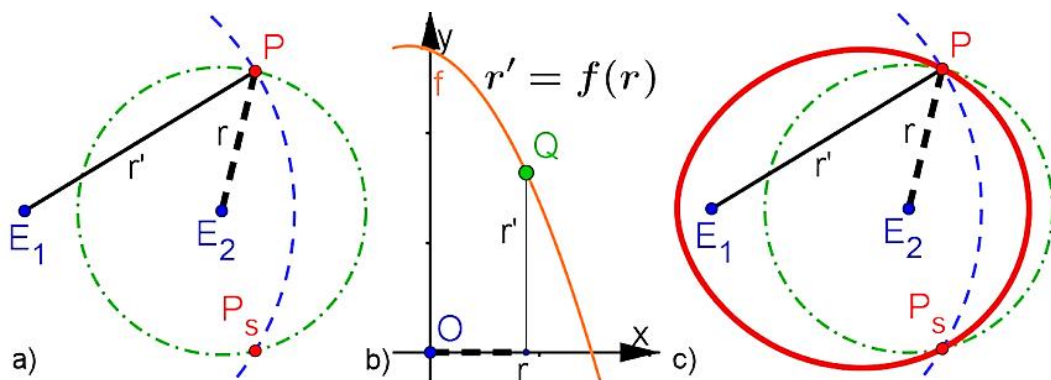


Abb. 2: a) Konstruktion von P gemäß der Definition mit zwei Kreisen, b) ein Punkt $Q = (r, r')$ erfüllt die Gleichung $r' = f(r)$, es wäre auch eine Relation $F(r, r') = 0$ möglich, c) Bipolare Kurve, Menge aller Punkte P , deren r und r' die Gleichung erfüllen und mit den Kreisen konstruierbar sind.

¹ Einen „sanften“ Zugang bietet das Buch im Abschnitt 4.3, den ich hier aber umgestalte zugunsten eines strafferen Vorgehens für Experten. Die im Buch in Aufgabe 4.4 angesprochenen Themen führe ich dagegen hier einzeln aus. Auf der Website <http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de> finden Sie zu allen Bildern die zugehörigen *.ggb und *.nb Dateien, ebenso diesen Aufsatz und den originalen Vortrag.

² Die Anregungen von Lockwood (1962) sind i. W. in Haftendorn (2017) umgesetzt.

Konstruktionsbedingungen und ihre Visualisierung

Lässt man also Q auf dem Graphen in Abb. 2b) wandern, entsteht als Spur von P der obere Teil der bipolaren Kurve. Wegen des stets existierenden Spiegelpunktes P_s gibt es die an der Achse $E'E = E_1E_2$ gespiegelte untere Hälfte der Ortskurve. Damit wird sogleich klar, dass ein Koordinatensystem sinnvollerweise diese Gerade als x -Achse und die y -Achse in der Mitte zwischen den Brennpunkten haben sollte. Mit diesem Grundverständnis sind schon viele Erkundungen möglich. Anstelle der Spur kann auch das Werkzeug „Ortslinie“ verwendet werden.

Beim Handeln wird die Beobachtung gemacht, dass die beiden Kreise sich nicht bei jeder Stellung von Q schneiden. Das führt zu der Frage, wann eigentlich wirklich ein Dreieck mit den Seiten r , r' , $2e$ entsteht und wann sich die Kreise genau berühren.

Dreiecksbedingung und Grenzfälle

$$\text{I: } r - r' \leq 2e \quad \text{II: } -2e \leq r - r' \quad \text{III: } 2e \leq r + r'$$

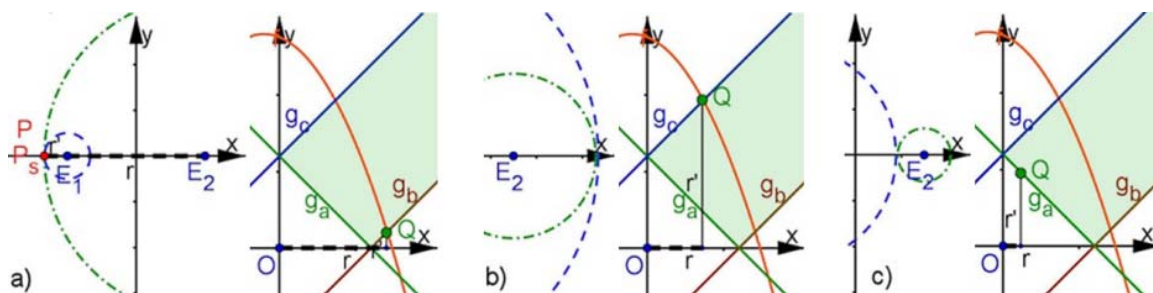


Abb. 3: Grenzgeraden a) I $g_b: r' = r - 2e$ b) II $g_c: r' = r + 2e$ c) III $g_a: r' = -r + 2e$

Genau die Punkte des kartesischen Graphen der gegebenen Relation zwischen r und r' , die in dem markierten Bereich (incl. Rand), dem *Gültigkeitsbereich*, liegen, gehören zu der so definierten *bipolaren Kurve*. Der Bereich ist zu seiner Mitte $y = x$ symmetrisch und allein durch e bestimmt.

Cassini'sche Kurven

Bipolare Kurven mit der Gleichung $r \cdot r' = k^2$ heißen *Cassini'sche Kurven* (Abb. 4). Betrachtet man die Hyperbeläste von rechts oben in Richtung Ursprung und damit die Cassini'schen Kurven von außen nach innen, so sieht man bei letzteren zunächst Ovale, die „flach“ werden, dann eine Einbuchtung bekommen. Sie gehören zu den Hyperbeln, die ganz im Gültig-

keitsbereich liegen. Berührt die Hyperbel die Gerade g_a , entsteht die Lemniskate. Für die gestrichelte Hyperbel zerfällt die Cassini'sche Kurve in zwei offensichtlich symmetrische Teile. Diese ziehen sich bei den Brennpunkten zusammen, werden aber nicht punktförmig, solange $k > 0$ bleibt.

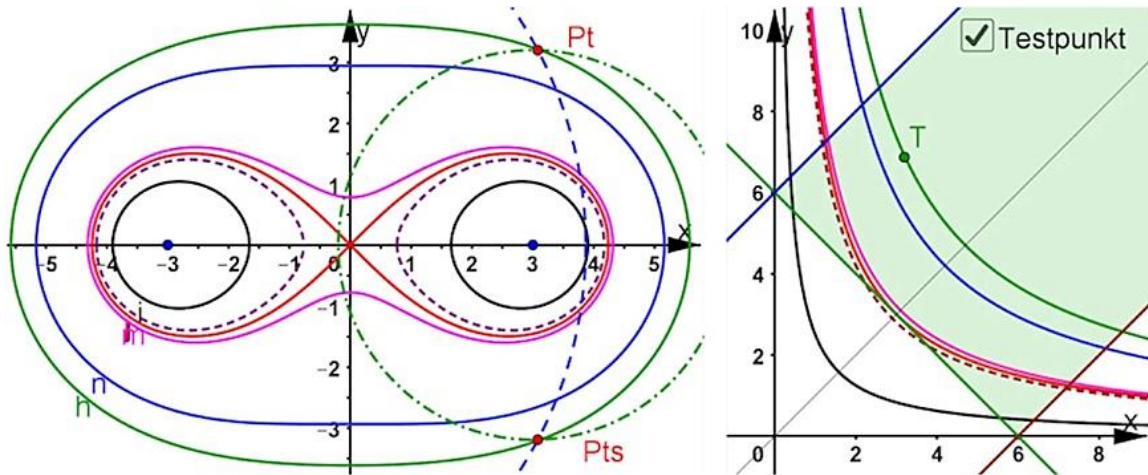


Abb. 4: Hyperbeläste im 1. Quadranten (rechts) definieren die Cassini'schen Kurven (links)

Die Formeln ergeben sich direkt aus den zwei Kreisgleichungen und der definierenden Gleichung:

$$e^4 + (x^2 + y^2)^2 = k^4 + 2e^2(x^2 - y^2)$$

Für $e = k$ ergibt sich tatsächlich die Bernoulli'sche Lemniskate. Die Schnitthöhe h der Kurve mit der y -Achse erfüllt geometrisch die Gleichung $h^2 + e^2 = r^2 = k^2$. Schneidet man die Gerade $y = \sqrt{k^2 - e^2}$ mit der Cassini'schen Kurve, so ergeben sich $\pm\sqrt{2}\sqrt{2e^2 - k^2}$ als weitere Schnittstellen. Diese verschwinden für $2e^2 = k^2$. Somit sind die Flachpunkte auf der y -Achse in der Höhe $h = \pm e$. So kann man sich einige Fragen stellen und geometrisch oder analytisch beantworten.

Descartes'sche Kurven

Bipolare Kurven mit der Gleichung $m \cdot r + n \cdot r' = k$ mit $m, n, k \in \mathbb{R}$ heißen *Descartes'sche Kurven* oder *Descartes'sche Ovale*. Gebräuchlich ist auch etwas missverständlich *kartesische Ovale*. Da nicht alle Descartes'schen Kurven wie Ovale aussehen und da man unter kartesischen Kurven etwas Anderes versteht, plädiere ich für den erstgenannten Begriff.

Die *Ellipsen*, für die die Summe der Abstände von den Brennpunkten $r + r' = 2a$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ erfüllt, und *Hyperbeln*, für die $r - r' = \pm 2a$ gilt,

sind offenbar spezielle Descartes'sche Kurven. Dabei ist $2a$ der Scheitelabstand auf der Geraden, die die Brennpunkte enthält.

Die Funktionen $r' = -r + 2a$ sind in dem rechten Grafikfenster offenbar Geraden, die die Randgeraden des Gültigkeitsbereiches senkrecht schneiden. Damit ist schon klar, dass die Ellipsen geschlossene zur y -Achse symmetrische Kurven sind, also wirkliche *Ovale*.

Die Funktionen $r' = r \pm 2a$ sind in dem rechten Grafikfenster offenbar ein paralleles Geradenpaar, das zu $y = x$ symmetrisch im Gültigkeitsbereich liegt. Damit ist ersichtlich, dass die Hyperbeln zwei zur y -Achse symmetrische unbegrenzte Kurven sind, also keine *Ovale*. Allenfalls in einer projektiven Sicht könnte man sie als solche auffassen.

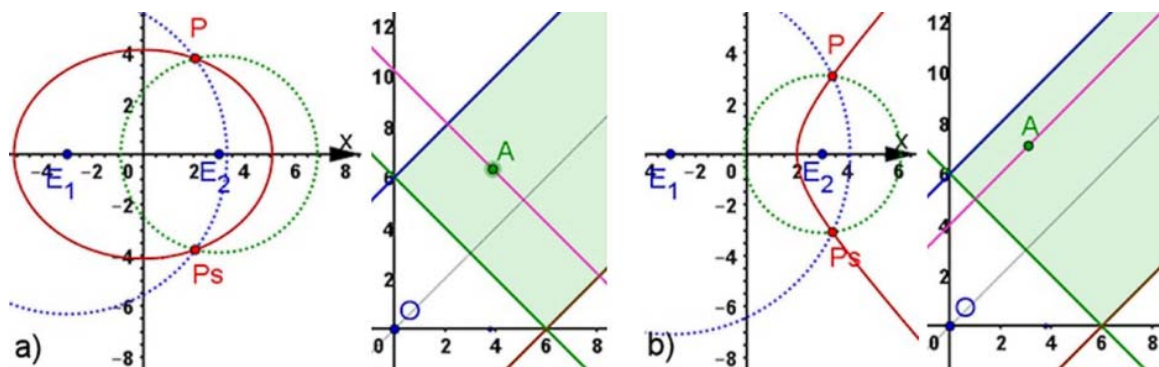


Abb. 5: a) Ellipse als Descartes'sche Kurve, eine Strecke im Gültigkeitsbereich,
 b) Hyperbelast als Descartes'sche Kurve, ein Strahl im Gültigkeitsbereich,
 zum zweiten Hyperbelast gehört der an $y = x$ gespiegelte Strahl.

Die Gleichung der Descartes'schen Kurven

Wenn man die Gleichung der Kurven aufstellen will, braucht man die beiden Kreise $K_r: (x - e)^2 + y^2 = r^2$ und $K_{r'}: (x + e)^2 + y^2 = r'^2$ und die Descartes'sche lineare Gleichung $m \cdot r + n \cdot r' = k$. Elimination von r und r' ergibt mit Mathematica, wenn man etwas elegant sortiert,

$$k^4 + ((m^2 - n^2)(e^2 + x^2 + y^2) - 2e(m^2 + n^2)x)^2 = 2k^2((m^2 + n^2)(e^2 + x^2 + y^2) - 2e(m^2 - n^2)x)$$

Bemerkung: Mit Copy as plaintext kann man das in GeoGebra übernehmen, wobei man *vorher* die Parameter e , k , m und n als Schieberegler definieren muss. Damit kann man die Descartes'schen Kurven erkunden.

Speziell für Ellipsen ist $m = 1$, $n = 1$, $k = 2a$. Setzt man dieses oben ein, so ergibt sich $16a^4 + (2e \cdot 2x)^2 = 8a^2 \cdot 2(e^2 + x^2 + y^2)$. Es ist a die

große Halbachse der Ellipse und b mit $b^2 = a^2 - e^2$ die kleine Halbachse. Damit folgt sofort $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wie erwartet. Für Hyperbeln gilt entsprechend $b^2 = e^2 - a^2$ und es folgt $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. In der Gleichung der Descartes'schen Kurven spielen offensichtlich die Vorzeichen von m, n, k keine Rolle. Für dieses Phänomen folgt nun eine geometrische Betrachtung.

Unterschiede zwischen geometrischer Konstruktion und Gleichung

Betrachten wir die Geradengleichungen $n \cdot r' = \pm m \cdot r \pm k$ mit positiven Parametern, so sieht man leicht, dass es sich nur um vier verschiedene Geraden handelt, von denen i. Allg. nur zwei überhaupt Punkte im Gültigkeitsbereich haben. Diese beiden Geraden erzeugen *geometrisch je eine* Descartes'sche Kurve. Die zugehörige *Gleichung ist für beide identisch*, sie erzeugt also zwei Ovale oder zwei Äste.

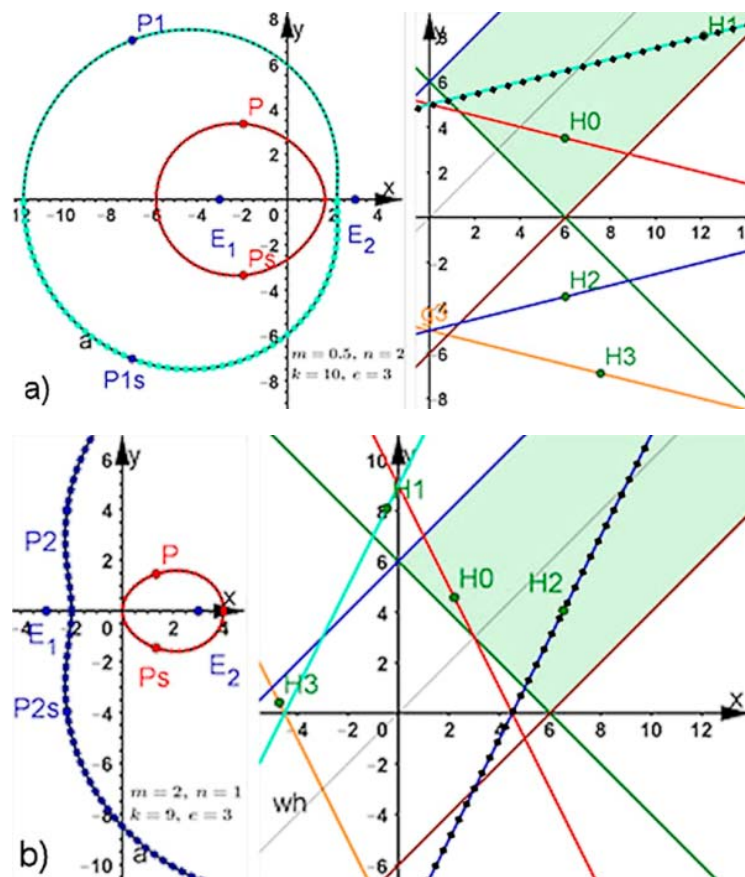


Abb. 6: a) und b) Das kleinere Descartes'sche Oval wird durch die Gerade durch H_0 erzeugt, das größere Oval mit der Beule bei durch die Gerade bei a) durch H_1 , bei b) durch H_2 .

Frei erfundene bipolare Kurven

Parabelgleichung: $r' = k(r - m)^2 + n$

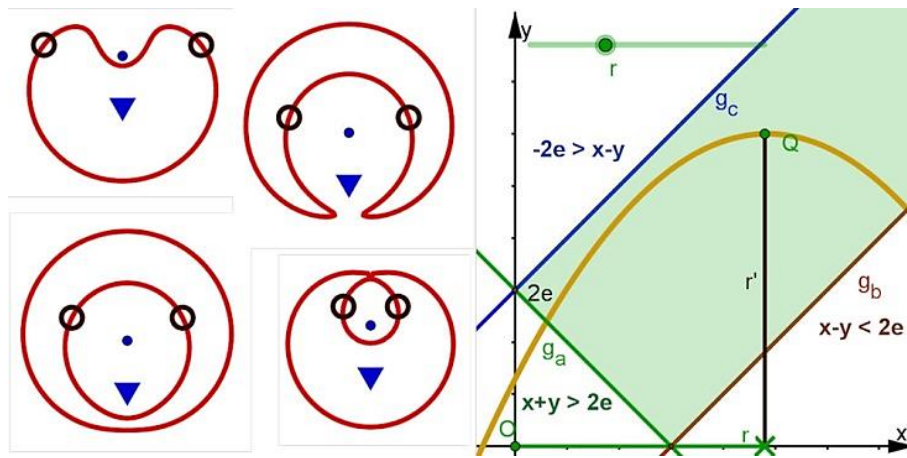


Abb. 7: Die vier bipolaren Kurven sind um $+90^\circ$ gedreht. Das Dreieck ist der linke Brennpunkt, der kleine Punkt ist der rechte Brennpunkt. Die „Augen“ sind die Punkte P und P_s . Zu welchem Bild gehört die im Gültigkeitsbereich gezeigte Parabel? Wo etwa liegt die Parabel für die anderen Bilder? Sind alle wesentlichen Fälle erfasst?

Grinsekatz aus schrägem Tangens $r' = 0.2 \tan(r) + r$

Wenn man interessante bipolare Kurven erfinden will, braucht man Funktionen oder Relationen, die im Gültigkeitsbereich interessante Graphen haben. Bei der oben vorgeschlagenen Tangensfunktion ist der Wendepunkt jedes Astes auf der Geraden $y = x$, die bei der bipolaren Kurve der y -Achse entspricht.

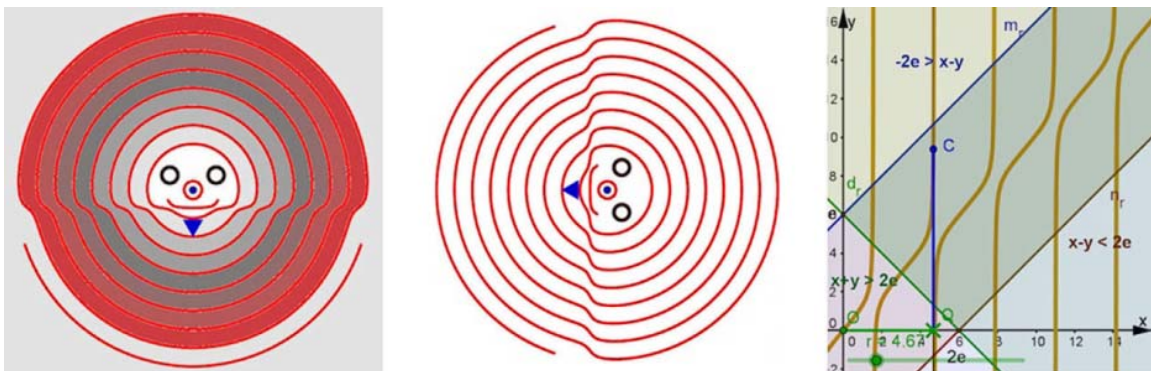


Abb.8: Frei nach Alice im Wunderland ist dies die Grinsekatz.

Wie in Abb. 7 sind das Dreieck, der Punkt und die Augen echte Elemente der Konstruktion. Die Schattierung ist hinzugefügt, aber der „Mund“ ist ein Artefakt, eigentlich ist er Teil einer geschlossenen Kurve durch die Augen. Zudem reicht die Grinsekatz bis ins Unendliche, wie auch der Tangens.

Der schräge Sinus-Teddy $r' = k \sin(r) + 2r$

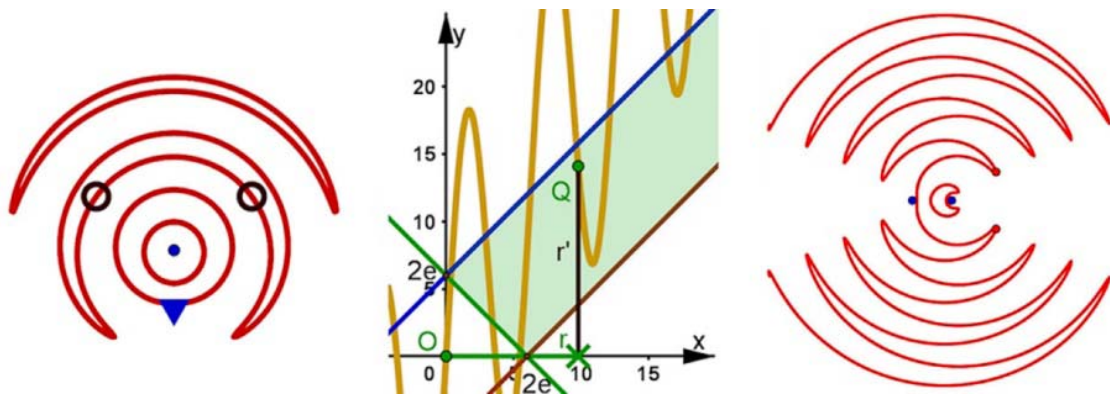


Abb. 9: Der Sinus-Teddy hat wirklich nur fünf geschlossene Kurvenbögen, wobei der kleinste unter der Nase verborgen ist. Dagegen ist die bipolare Kurve rechts nur teilweise dargestellt. Ihr liegt eine Sinuskurve zugrunde, die auf $y = x$ aufgesetzt ist und eine Amplitude so klein hat, dass sie den Gültigkeitsbereich nicht verlässt. Sie besteht also aus zwei Bögen, von denen nur der kleine Mond endlich ist.

Literaturverzeichnis

Haftendorn, Dörte (2017). Kurven erkunden und verstehen; Abschnitt 4.3 S.99-107, Heidelberg: Springer Spektrum Verlag.

Haftendorn, Dörte. Website <http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de> Bereich Barocke Kurven, Bipolare Kurven.

Schupp, Hans, Darbrock, Heinz (1995). Höhere Kurven. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

Lockwood, E. H. (1961): A Book of Curves. 1. Aufl. 1. Band London: University Press.

Adresse der Autorin:
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn
 Ehemals: Leuphana Universität Lüneburg
 Privat: Barckhausenstr. 44
 21335 Lüneburg
 Haftendorn@uni.leuphana.de