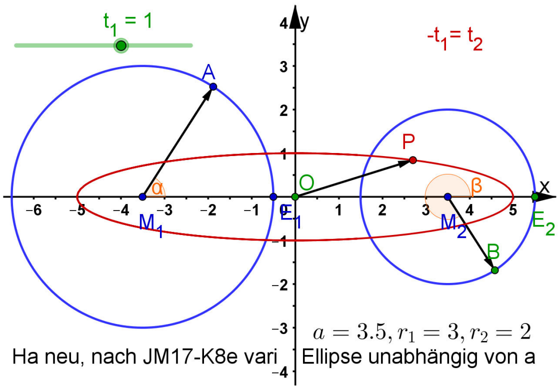
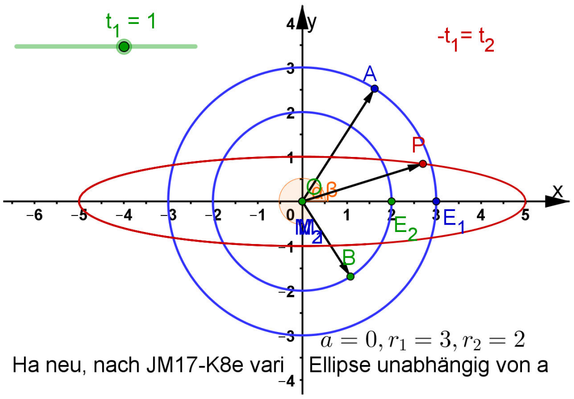
Kurven aus Kreisläufen (Meyer’sche Kurven)

meyersche-kurven.nb   www.kurven-sehen-und-verstehen.de Bereich Kap. 8 Drehwurm
Dörte Haftendorn

Anregung Jörg Meyer, AK Geo 2017 Saarbrücken



Bei Meyer haben die Kreise verschiedene Mittelpunkte auf der x-Achse, symmetrisch zu O in Entfernung a. Da aber P aus der Vektorsumme entsteht, ist die Ortskurve von P unabhängig von a. Das gilt für alle Beispiele von Jörg Meyer.



A auf Kreis 1, Radius r_1 Winkel t_1, B auf Kreis 2, Radius r_2 Winkel t_2

```
In[36]:= P = {xa + xb, ya + yb}

Out[36]= {xa + xb, ya + yb}
```

```
In[37]:= xa = r1 Cos[t1]; ya = r1 Sin[t1]; xb = r2 Cos[t2]; yb = r2 Sin[t2]; P
                 Kosinus            Sinus            Kosinus            Sinus

Out[37]= {r1 Cos[t1] + r2 Cos[t2], r1 Sin[t1] + r2 Sin[t2]}
```

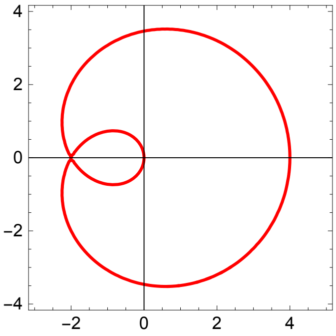
In Folgenden werden gleiche und unterschiedliche Radien und verschiedene Verhältnisse von t_1 und t_2 betrachtet.

Spezielle Pascalsche Schnecke bei $2t_1$=t_2

Erst spezieller mit Schlaufe, die den Ursprung außerhalb des Doppelpunktes enthält

```
         Pb = (P /. {r1 → r, r2 → r, t1 → t, t2 → 2 t})
Out[20]= {r Cos[t] + r Cos[2 t], r Sin[t] + r Sin[2 t]}

In[21]:= x == P[[1]]
         y == P[[2]]
Out[21]= x == r Cos[t] + r Cos[2 t]

Out[22]= y == r Sin[t] + r Sin[2 t]

In[25]:= Eliminate[{x == r Cos[t] + r Cos[2 t], y == r Sin[t] + r Sin[2 t]} // TrigExpand, t] //
         eliminiere           Kosinus    Kosinus          Sinus      Sinus           erweitere trigonometrisc
          FullSimplify
          vereinfache vollständig
Out[25]= r^2 (2 r x + 3 (x^2 + y^2)) == (x^2 + y^2)^2

In[29]:= r = 2; ContourPlot[r^2 (2 r x + 3 (x^2 + y^2)) == (x^2 + y^2)^2,
                Konturgraphik
          {x, -3, 5}, {y, -4, 4}, Axes → True, ContourStyle → Red]
                                  Axen   wahr  Konturenstil    rot
```

Out[29]=



```
In[33]:= {P, xa, ya, xb, yb} =.;
```

Übliche Gleichung der Pascalschen Schnecken, Doppelpunkt im Ursprung

$(x^2+y^2\text{-}2a\ x)^2\ \ ==\ \ k^2\ (x^2+y^2)$

Die hergeleitete Gleichung und ihr Doppelpunkt

```
In[39]:= r =.; Solve[r^2 (2 r x + 3 (x^2 + y^2)) == (x^2 + y^2)^2 /. y → 0, x]
               löse
```

Verschiebung um r nach rechts

In[44]:= $r^2\ (2\,r\,x + 3\,(x^2 + y^2)) - (x^2 + y^2)^2$ `/. x -> x - r   // Expand`

multipliziere aus

Out[44]= $-3\,r^2\,x^2 + 4\,r\,x^3 - x^4 + r^2\,y^2 + 4\,r\,x\,y^2 - 2\,x^2\,y^2 - y^4$

In[46]:= $-\ (x^2 + y^2 - 2\,a\,x)^2 + k^2\ (x^2 + y^2)$ `// Expand`

multipliziere aus

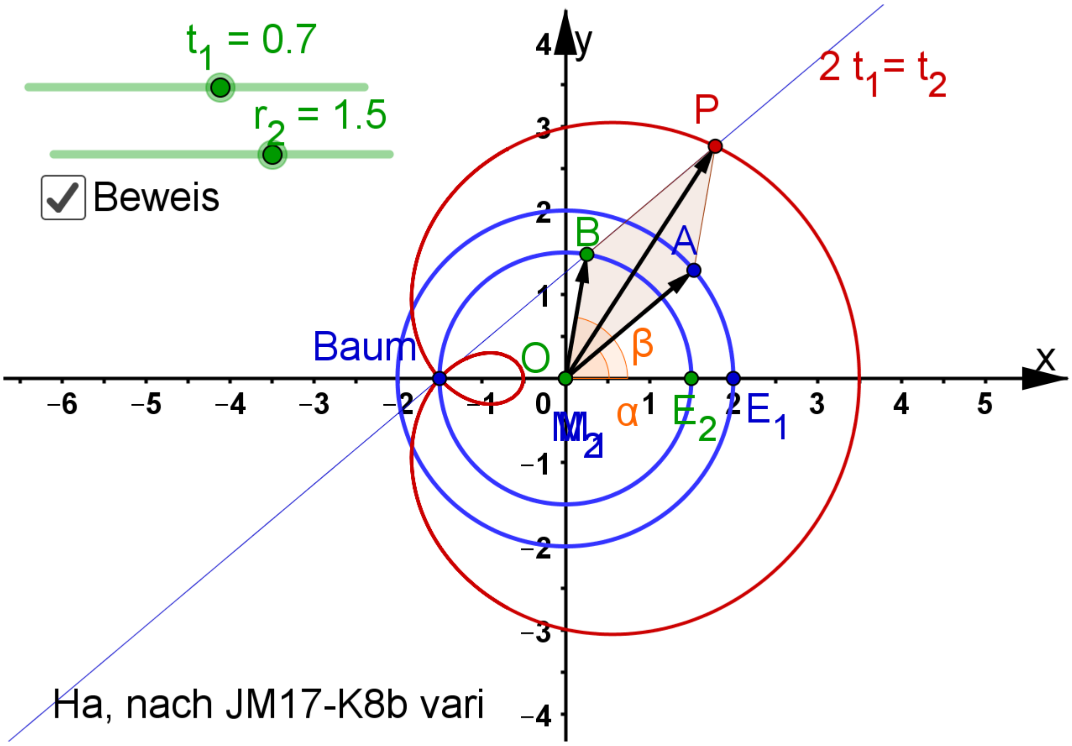
Out[46]= $-4\,a^2\,x^2 + k^2\,x^2 + 4\,a\,x^3 - x^4 + k^2\,y^2 + 4\,a\,x\,y^2 - 2\,x^2\,y^2 - y^4$

In[49]:= `Solve`$[\{-4\,a^2 + k^2 == -3\,r^2,\ a == r\},\ r]$

löse

Out[49]= $\{\{r \to -k\},\ \{r \to k\}\}$

Allgemeinere Pascal’sche Schnecken



Geometrischer Beweis: Gerade BP trifft dem Baum (-r2,0) da β Außenwinkel der Dreiecks BaumOB ist und $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ gilt. Strecke BP = Strecke OA = r1 = *k* = konstant.

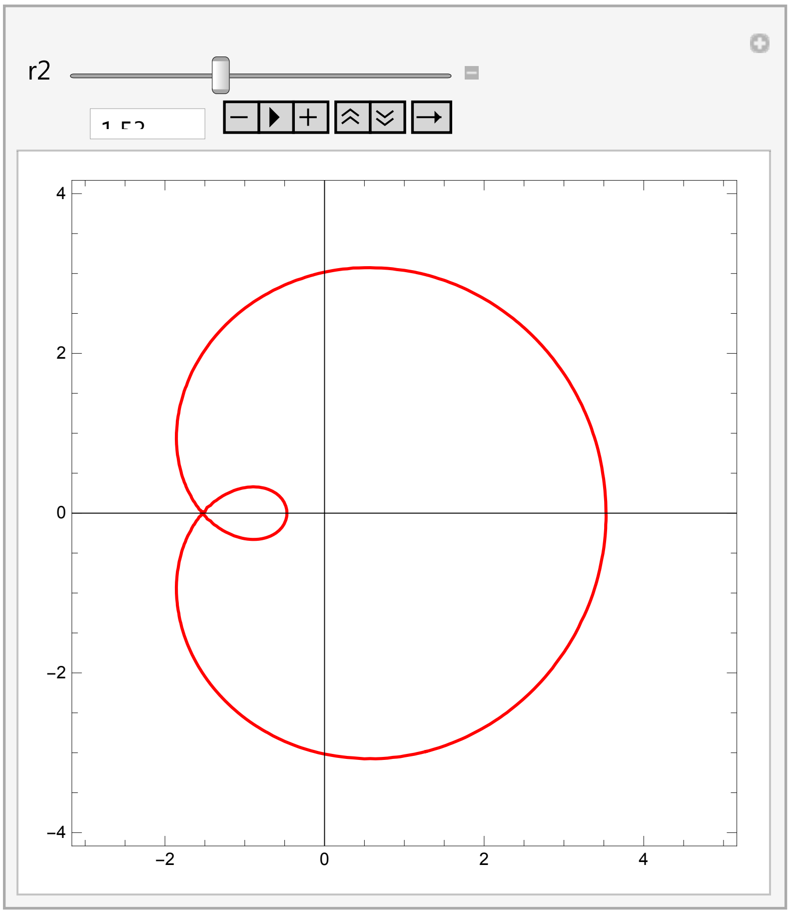
Darum läuft *B* als Herr auf dem Wanderkreis mit Radius r2, auf dem auch der Baum ist. *P* ist der Hund an der Leine der Länge *k* = r1.

Rechnerischer Beweis

```
In[50]:= P
Out[50]= {r1 Cos[t1] + r2 Cos[t2], r1 Sin[t1] + r2 Sin[t2]}

In[51]:= Pp = (P /. {t1 → t, t2 → 2 t})
Out[51]= {r1 Cos[t] + r2 Cos[2 t], r1 Sin[t] + r2 Sin[2 t]}

In[53]:= Eliminate[{x == r1 Cos[t] + r2 Cos[2 t], y == r 1 Sin[t] + r2 Sin[2 t]} // TrigExpand, t] //
         eliminiere             Kosinus      Kosinus                 Sinus        Sinus                   erweitere trigonometrisc
          FullSimplify
          vereinfache vollständig
Out[53]= $Aborted

In[71]:= {r1, r2, r} =.;

In[63]:= Eliminate[{x == r1 c + r2 (c^2 - s^2), y == r1 s + r2 2 s c, c^2 + s^2 == 1}, {c, s}] // FullSimplify
         eliminiere                                                                                    vereinfache vollständ
Out[63]= (-r2^2 + x^2 + y^2)^2 == r1^2 ((r2 + x)^2 + y^2)
```

```
In[98]:= r1 = 2;
         r2 =.;
         Manipulate[ContourPlot[(-r2^2 + x^2 + y^2)^2 == 4 ((r2 + x)^2 + y^2),
         manipuliere  Konturgraphik
            {x, -3, 5}, {y, -4, 4}, Axes → True, ContourStyle → Red],
                                    Axen   wahr    Konturenstil    rot
          {{r2, 1}, 0, 4}]
         r1 =.
```

Out[98]=



Übliche Gleichung der Pascalschen Schnecken, Doppelpunkt im Ursprung

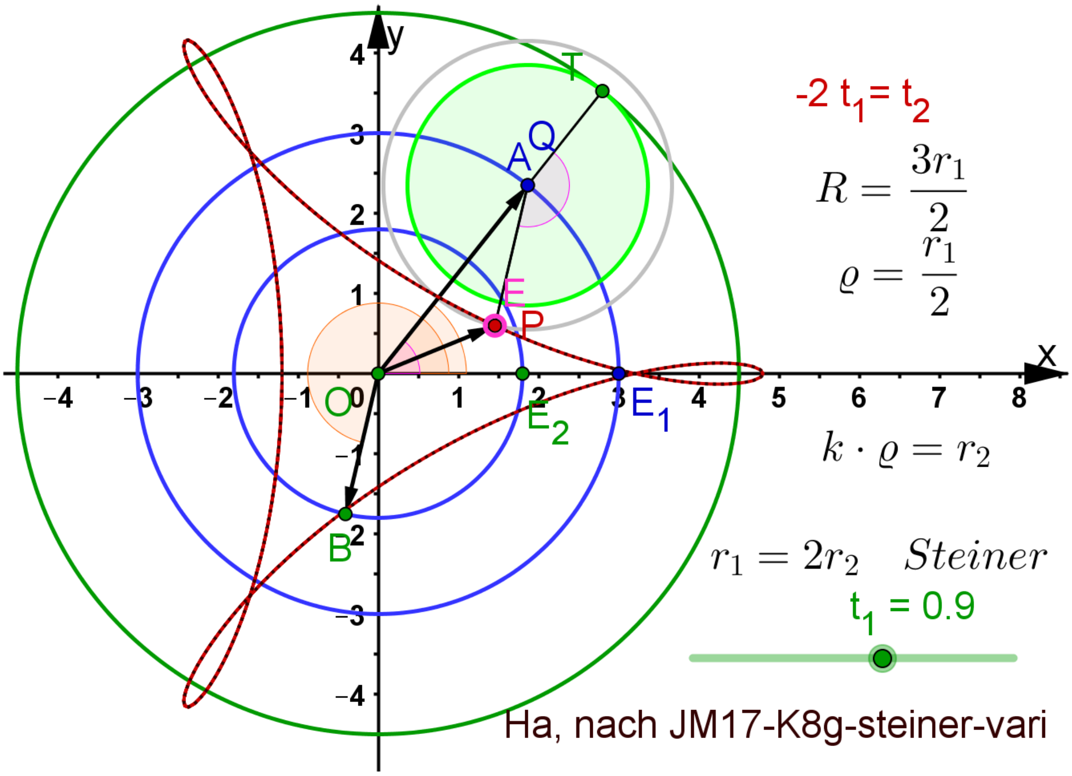
$(x^2+y^2\text{-}2a\ x)^2\ ==\ k^2\ (x^2+y^2)$

Die hergeleitete Gleichung und ihr Doppelpunkt (-r2,0)

```
In[100]:= Solve[(-r2^2 + x^2 + y^2)^2 == r1^2 ((r2 + x)^2 + y^2) /. y → 0, x]
          löse

Out[100]= {{x → -r2}, {x → -r2}, {x → -r1 + r2}, {x → r1 + r2}}

          (x^2 + y^2 - 2 a x)^2 == k^2 (x^2 + y^2); (* original Pascal'sche Schnecke*)
```

Man sieht durch Vergleich, wie schon geometrisch bewiesen, a=r2 und k=r1.

Steinerkurve u.a. Hypotrochoiden



```
In[112]:= P

Out[112]= {r1 Cos[t1] + r2 Cos[t2], r1 Sin[t1] + r2 Sin[t2]}

In[114]:= Ph = P /. {t1 -> t, t2 → -2 t}

Out[114]= {r1 Cos[t] + r2 Cos[2 t], r1 Sin[t] - r2 Sin[2 t]}
```

Hypotrochoiden nach Formel 8.13 in meinem Buch S. 247

```
In[115]:= xh == ρ (m - 1) Cos[t] + ρ k Cos[(m - 1) t];
                          Kosinus        Kosinus
          yh == ρ (m - 1) Sin[t] - ρ k Sin[(m - 1) t];
                          Sinus          Sinus
```

Also r1=ρ (m-1), ρ k=r2, Es war $m = \frac{R}{\rho}$, bei der Steinerkurve m=3

```
In[117]:= Solve[{r1 == ρ (R/ρ - 1), ρ k == r2, (R/ρ - 1) == 2}, {R, ρ, k}]
          löse
```

Out[117]= $$\left\{\left\{R \to \frac{3\,r1}{2},\ \rho \to \frac{r1}{2},\ k \to \frac{2\,r2}{r1}\right\}\right\}$$

Ellipsen u.a. Hypotrochoiden, Bild oben!

```
In[119]:= P

Out[119]= {r1 Cos[t1] + r2 Cos[t2], r1 Sin[t1] + r2 Sin[t2]}

In[120]:= Pe = P /. {t1 -> t, t2 → -t}

Out[120]= {r1 Cos[t] + r2 Cos[t], r1 Sin[t] - r2 Sin[t]}
```

Hypotrochoiden nach Formel 8.13 in meinem Buch S. 247

```
In[115]:= xh == ρ (m - 1) Cos[t] + ρ k Cos[(m - 1) t];
                          Kosinus         Kosinus
          yh == ρ (m - 1) Sin[t] - ρ k Sin[(m - 1) t];
                          Sinus           Sinus
```

Also r1=ρ (m-1), ρ k=r2,   Es war $m = \frac{R}{\rho}$, bei derEllipse m=2

```
                           R                 R
In[122]:= Solve[{r1 == ρ  (— - 1), ρ k == r2, (— - 1) == 1}, {R, ρ, k}]
          löse             ρ                 ρ

                                         r2
Out[122]= {{R → 2 r1, ρ → r1, k → ——}}
                                         r1
```

Sonderfall Strecke: k=1, also r2=r1

Astroide u.a. Hypotrochoiden

```
In[123]:= P

Out[123]= {r1 Cos[t1] + r2 Cos[t2], r1 Sin[t1] + r2 Sin[t2]}

In[124]:= Pa = P /. {t1 -> t, t2 → -3 t}

Out[124]= {r1 Cos[t] + r2 Cos[3 t], r1 Sin[t] - r2 Sin[3 t]}
```

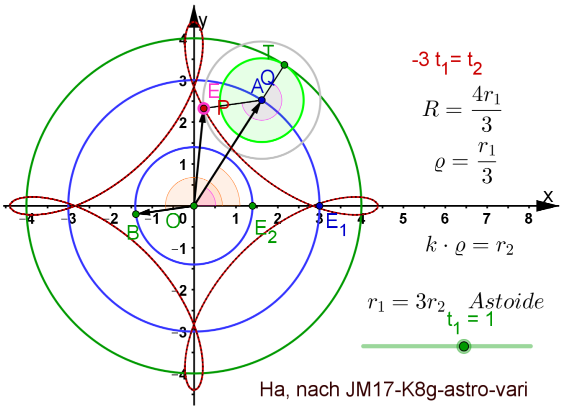
Hypotrochoiden nach Formel 8.13 in meinem Buch S. 247

```
In[115]:= xh == ρ (m - 1) Cos[t] + ρ k Cos[(m - 1) t];
                          Kosinus         Kosinus
          yh == ρ (m - 1) Sin[t] - ρ k Sin[(m - 1) t];
                          Sinus           Sinus
```

Also r1=ρ (m-1), ρ k=r2, Es war $m = \frac{R}{\rho}$, bei der Astroide m=4

In[125]:= $\mathtt{Solve}\left[\left\{\mathtt{r1} == \rho\left(\frac{\mathtt{R}}{\rho} - 1\right),\ \rho\,\mathtt{k} == \mathtt{r2},\ \left(\frac{\mathtt{R}}{\rho} - 1\right) == 3\right\},\ \{\mathtt{R}, \rho, \mathtt{k}\}\right]$
löse

Out[125]= $\left\{\left\{\mathrm{R} \to \frac{4\,\mathrm{r1}}{3},\ \rho \to \frac{\mathrm{r1}}{3},\ \mathrm{k} \to \frac{3\,\mathrm{r2}}{\mathrm{r1}}\right\}\right\}$



Ha, nach JM17-K8g-astro-vari

Pascalsche Schnecken als Epitrochoiden

In[123]:= **P**

Out[123]= {r1 Cos[t1] + r2 Cos[t2], r1 Sin[t1] + r2 Sin[t2]}

```
In[131]:= Pp = P /. {t1 -> t, t2 → 2 t}
```

Out[131]= {r1 Cos[t] + r2 Cos[2 t], r1 Sin[t] + r2 Sin[2 t]}

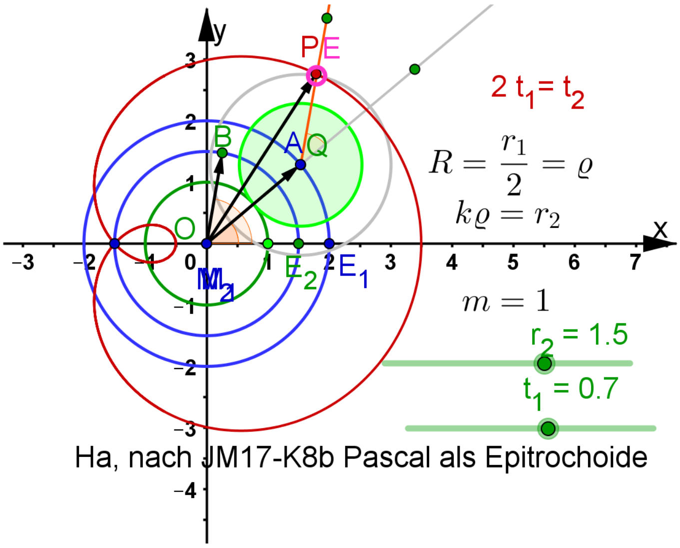
Epitrochoiden nach Formel 8.13 in meinem Buch S. 247

In[132]:= $\mathtt{xh} == \rho\ (\mathtt{m} + 1)\ \mathtt{Cos[t]} - \rho\,\mathtt{k}\,\mathtt{Cos}[(\mathtt{m} + 1)\ \mathtt{t}];$
Kosinus Kosinus
$\mathtt{yh} == \rho\ (\mathtt{m} + 1)\ \mathtt{Sin[t]} - \rho\,\mathtt{k}\,\mathtt{Sin}[(\mathtt{m} + 1)\ \mathtt{t}];$
Sinus Sinus

Also r1=ρ (m+1), ρ k=r2, Es war $m = \frac{R}{\rho}$, bei der Pascal'schen Schnecke m=1

In[134]:= $\mathtt{Solve}\left[\left\{\mathtt{r1} == \rho\left(\frac{\mathtt{R}}{\rho} + 1\right),\ \rho\,\mathtt{k} == \mathtt{r2},\ \left(\frac{\mathtt{R}}{\rho} + 1\right) == 2\right\},\ \{\mathtt{R}, \rho, \mathtt{k}\}\right]$
löse

Out[134]= $\left\{\left\{\mathrm{R} \to \frac{\mathrm{r1}}{2},\ \rho \to \frac{\mathrm{r1}}{2},\ \mathrm{k} \to \frac{2\,\mathrm{r2}}{\mathrm{r1}}\right\}\right\}$



Meyer’sche Kurve c) als Epitrochoide

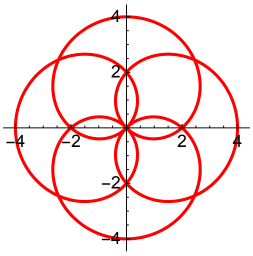
```
In[123]:=  P

Out[123]=  {r1 Cos[t1] + r2 Cos[t2], r1 Sin[t1] + r2 Sin[t2]}

In[128]:=  Pa = P /. {t1 -> t, t2 → 5 t}

Out[128]=  {r1 Cos[t] + r2 Cos[5 t], r1 Sin[t] + r2 Sin[5 t]}
```

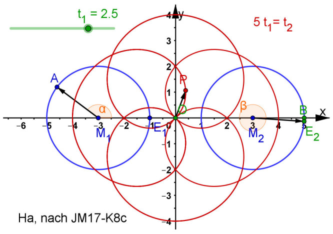
Epitrochoiden nach Formel 8.13 in meinem Buch S. 247

```
In[129]:=  xh == ρ (m + 1) Cos[t] - ρ k Cos[(m + 1) t];
                           Kosinus        Kosinus
           yh == ρ (m + 1) Sin[t] - ρ k Sin[(m + 1) t];
                           Sinus          Sinus
```

Also r1=ρ (m+1), ρ k=r2,   Es war $m = \frac{R}{\rho}$, bei der   c-Kurve m=4

```
                    R                      R
           Solve[{r1 == ρ (─ + 1), ρ k == r2, (─ + 1) == 5}, {R, ρ, k}]
                    ρ                      ρ
           löse

                  4 r1     r1     3 r2
Out[127]=  {{R → ────, ρ → ──, k → ────}}
                   3       3       r1

           r1 = 2; r2 = 2;
           ParametricPlot[{r1 Cos[t] + r2 Cos[5 t], r1 Sin[t] + r2 Sin[5 t]},
           parametrische Darstell···  Kosinus     Kosinus       Sinus         Sinus
             {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle → Red]
                  Krei···Darstellungsstil rot
           r1 =.;
           r2 =.;
```





Ha, nach JM17-K8c

Meyer’sche Kurve d) als Epitrochoide

In[123]:= **P**

Out[123]= {r1 Cos[t1] + r2 Cos[t2], r1 Sin[t1] + r2 Sin[t2]}

In[139]:= $$\texttt{Pa = P /. }\left\{\texttt{t1 -> t, t2} \to \frac{3}{5}\,\texttt{t}\right\}$$

Out[139]= $$\left\{\text{r2 Cos}\left[\frac{3\,t}{5}\right] + \text{r1 Cos}[t],\ \text{r2 Sin}\left[\frac{3\,t}{5}\right] + \text{r1 Sin}[t]\right\}$$

Epitrochoiden nach Formel 8.13 in meinem Buch S. 247

In[129]:= **xh == ρ (m + 1) Cos[t] – ρ k Cos[(m + 1) t];**

Kosinus Kosinus

yh == ρ (m + 1) Sin[t] – ρ k Sin[(m + 1) t];

Sinus Sinus

Also r1=ρ (m+1), ρ k=r2, Es war $m = \frac{R}{\rho}$, bei der d-Kurve $m = \frac{-2}{5}$

In[140]:= $$\text{Solve}\left[\left\{\text{r1} == \rho\left(\frac{R}{\rho}+1\right),\ \rho\,k == \text{r2},\ \left(\frac{R}{\rho}+1\right) == \frac{3}{5}\right\},\ \{R, \rho, k\}\right]$$

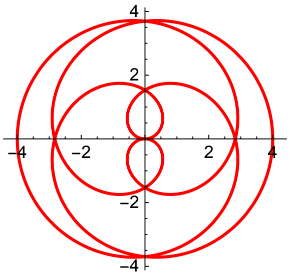
löse

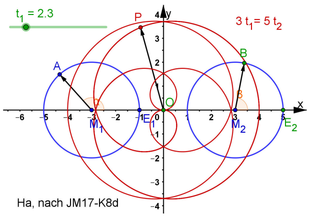
Out[140]= $$\left\{\left\{R \to -\frac{2\,\text{r1}}{3},\ \rho \to \frac{5\,\text{r1}}{3},\ k \to \frac{3\,\text{r2}}{5\,\text{r1}}\right\}\right\}$$

In[149]:=

```
r1 = 2; r2 = 2;
ParametricPlot[{r1 Cos[t] + r2 Cos[3/5 t], r1 Sin[t] + r2 Sin[3/5 t]},
|parametrische Darstell···  |Kosinus  |Kosinus  |Sinus  |Sinus

  {t, 0, 10 Pi}, PlotStyle → Red]
               |Krei···|Darstellungsstil |rot
r1 =.;
r2 =.;
```

Out[149]=





Ha, nach JM17-K8d