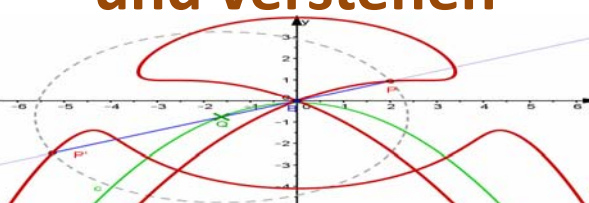


Kurven erkunden und verstehen



Ein vernachlässigtes Feld, es könnte aber ein fruchtbarer Acker sein, auf dem Mathematik und Mathematikbegeisterung gedeihen können

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 1

Kurven erkunden und verstehen

- Mein Buch ist in Arbeit!



ab Sommer 2016


Bis dahin
und Bereich
Kurven

www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 2

Kurven erkunden und verstehen

- Vielen Dank, dass ich diesem ruhmreichen Saal einen Vortrag halten darf.
- Otto Toeplitz hätte, so denke ich, mein Vorhaben gebilligt, mich in „generischer Methode“ dem Thema Kurven zu nähern.



2. Aufl. Das andere Buch war für Herbst „alle“, das neue ist für 2015 die Mathematik-Lehre

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 3

Ziele von Vortrag und Buch

- Es ist erst einmal natürlich für Sie, die Sie hierher gekommen sind.
- Zielgruppe am Ende: **Lernende** der Mathematik
- Zielgruppe der Mittler: **Lehrer** und **Lehramtsstudierende** der Mathematik
- Zielgruppe der Impulsgeber: Lehrende der Mathematik in **fachwissenschaftlicher Lehramtsausbildung** mit didaktischem Futter
- Handwerklich saubere Arbeit, geometrische und analytische Behandlung, Beweise, logischer Aufbau,...
- **Kein Ziel ist: Durch Formalisierung Lernen zu verhindern.**

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 4



Kurven, alles ist mit allem verwoben

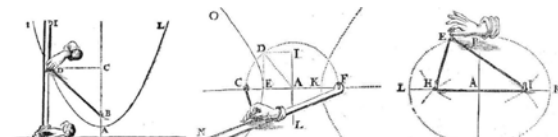
Wie führt man Kurven ein?	Wo sind Freiheiten zum Erkunden?	Was heißt „verstehen“ ?
Wie ermöglicht man Eigentätigkeit?	Welche Bezüge gibt es unter den Kurven?	Welche Werkzeuge sind hilfreich?

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 5

Starten mit Handeln



www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 6

Geometrisch Erfassen und Realisieren

Konchoide des Nikomedes

Lineale mit Faden: Parabel
Hyperbel

Bernoulli'sche Lemniskate

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 7

Mathematisch vertiefen

Für die Jüngsten: Konchoide des Nikomedes

- Alle Erscheinungsformen finden.
- Überlegen und experimentieren, wovon die Form abhängt.
- Überlegen, ob der „Wanderweg von Q“ geschnitten werden kann.
- Ausprobieren und entscheiden, welche der folgenden Gleichungen stimmen kann:

Aufgabe 3.1 Visuelles Prüfen von Termumformungen
Prüfen Sie durch Zeichnen in GeoGebra und durch Rechnung: Welche der folgenden Gleichungen ist eine richtige Umformung dieser Hundskurven-Gleichung?

a) $(x+y)^2 \cdot (y-a)^2 = k^2 y^2$ b) $(x^2+y^2) \cdot (y^2-a^2) = k^2 y^2$
 c) $x^2(y-a)^2 = y^2(k^2 - (y-a)^2)$ d) $(k+y-a)(k-y+a)y^2 = (x-y-a)^2$
 e) $x^2 y^2 = (y+a)^2(k^2 - y^2)$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de Folie 8

Mit Pythagoras und Strahlensatz

Konchoide des Nikomedes

Einhaltung von Bezeichnungsstandards
 $Q = (u, v)$ **X in grün**
 $P = (x, y)$ **in rot**
 Kreise zum Übertragen von Abständen grau gestrichelt

Gleichung 1: Weg von Q $v = a, u$ frei

Gleichung 2: Ort 1 von P $(u-x)^2 + (v-y)^2 = k^2$

Gleichung 3: Ort 2 von P Also: $(\frac{ax}{y} - x)^2 + (a-y)^2 = k^2$
 $\frac{y}{x} = \frac{v}{u}$ $(x^2 + y^2) \cdot (y-a)^2 = k^2 y^2$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de Folie 9

Kurven aus geometrischen Konstruktionen

Konchoide des Nikomedes

Strophoïde

Cissoïde

Alles so speziell! Erkunden????

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de Folie 10

Allgemeine geometrische Konstruktion der Konchoide

- Wanderkurve für Q beliebig
- Auf Fahrstrahl Leinenlänge k markieren

$r(\theta) = \rho(\theta) \pm k$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 11

Pascal'sche Schnecken als spezielle Konchoiden mit „Kreisstraße“

weder Schlaufe noch Spitze

mit Schlaufe $k=1.2$

mit Spitze **Kardioïde** $k=2$

$k=2.3$

Nun gut! Aber freies Erkunden?

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de Folie 12

allgemeinere Konchoiden mit anderen Wanderwegen

den Pol an andere Stelle legen

Nicht bloß angucken, sondern nachdenken: Warum hat man alle Fälle betrachtet, wenn B von +2 nach links rückt und man sonst nur k variiert?

Konchoid_Kreis_pascal.ggb

freies Erkunden!

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 13

allgemeinere Konchoiden mit Parabel-Wanderwegen

parabel-konch.ggb

freies Erkunden!

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 14

Allgemeine geometrische Konstruktion der Strophoide

- Wanderkurve für Q beliebig
- Kreis[Q,A]
- Auf Fahrstrahl P und P'

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 15

Allgemeine geometrische Konstruktion der Cissoide

- Wanderkurve C_1 für Q beliebig
- Zweite Kurve C_2
- Fahrstrahl schneidet C_2 in E
- Vektor QE an O anhängen ergibt P

$$r(\theta) = k(\theta) - \rho(\theta)$$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 16

Allgemeine geometrische Konstruktion der Cissoide

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 17

Kurven aus geometrischen Konstruktionen

Versiera der Maria Agnesi 1748

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

Tipp: solche „Rasterkonstruktionen“ sind klausurfähig.

1718-1799

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-verstehen.de Folie 18

Kurven aus geometrischen Konstruktionen

Versiera der Maria Agnesi

Auch das noch:
Querschnitt zeigt den Goldenen Schnitt

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 19

Ellipse aus der Scheitelkreise-Konstruktion

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 20

Allgemeine geometrische Konstruktion der Versiera

- Wanderkurve C_1 für Q beliebig
- Zweite Kurve C_2
- Fahrstrahl schneidet C_2 in E
- $P = (x(E), y(Q))$

P hat also die Abszisse von E und die Ordinate von Q

*Diese Verallgemeinerung ist von mir, aber so ist es eben:
Kurven locken Kreativität*

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 21

Die allgemeine Versiera verknüpft Geometrie und Analysis

Satz 3.8 (Gleichungen für die allgemeine Versiera)
Implizite Gleichungen (möglichst ohne Bruchterme) für einige wichtige Fälle

C_1	C_2	allgemeine Versiera
$y = f(x)$	$y = k(x)$	$y = f\left(\frac{x}{k(x)}\right)$
Parabel $y = mx^2 - a$	$y = k(x)$	$(y + a)k(x)^2 = mx^2 y^2$
$F(x, y) = 0$	$y = k(x)$	$F\left(\frac{x}{k(x)}, y\right) = 0$
Kreis $x^2 + (y - a)^2 = a^2$	$y = k(x)$	$x^2 y = k(x)^2 (2a - y)$
$F(x, y) = 0$	$K(x, y) = 0$	Aus $F(u, y), K(x, t), xy = ut$ u und t eliminieren

Vieles geht in GeoGebra-CAS, TI Nspire CAS o.Ä.
Elimination geht (für jeden) mit [Wolfram-Alpha](http://www.wolfram-alpha.com)

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 22

Versiera mit Ellipse und Hyperbel

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 23

Versiera mit Ellipse und Hyperbel

Result:

$$s^2 (y^2 - b^2) = \frac{b^2 x^2 y^2}{a^2} - 4a^2 b^2 + 4a^2 y^2 + 4a b^2 x - 4a x y^2 - b^2 x^2 + x^2 y^2 \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0$$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 24

Kurvengleichung $F(x,y)=0$ und 3D

$(y - x^2 - a)(x^2 + y^2 - r^2) = 0$
 Der Graph der Produktkurve ist die Vereinigung der Punkte der Faktorkurven.

$(y - x^2 - a)(x^2 + y^2 - r^2) = h$

Wenn hier keine 0 steht?

Dann hilft die 3D-Darstellung beim Verstehen

[produkt-ohne3D](#)
 $z = f(x, y) = (y - x^2 - a)(x^2 + y^2 - r^2) = 0$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 25

Kurvengleichung $F(x,y)=0$ und 3D

e: $(y - x^2 - a)(x^2 + y^2 - r^2) = h$

d: $(x,y) = (y - x^2)(x^2 + y^2 - 1.5^2)$

$a = 0$
 $r = 1.5$
 $h = -0.72$

Gleichungen anzeigen

[produkt3D](#)

Mit zwei Fenstern in GeoGebra!

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 26

3D-Darstellungen anderer Kurven

Konchoide

Durch Schnitte in anderer Höhe bilden sich Kurvenfamilien.

Doch manchmal kommt es anders als man denkt.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 27

Allgemeine bipolare Kurven

Visualisierung der Dreiecksbedingung im zweiten Grafikenfenster in GeoGebra.

gekoppelte Darstellung

[bipolar-bereich-start-fkt](#)

Ein Punkt P habe die Abstände r und r' von zwei „Brennpunkten“ E und E' im Abstand $2e$. **Jede Gleichung von r und r' definiert eine bipolare Kurve** als Menge aller Punkte, die sowohl die Gleichung erfüllen, als auch mit E und E' eine Dreieck bilden.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 28

Bipolare Sinus-Kurven

$r' = |k \sin(r)|$

Durch die **gekoppelte Darstellung** kann man die Besonderheiten alle verstehen.

[bipolar-bereich-start-fkt](#)

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 29

Gekoppelte Polardarstellung

Durchlauf 2π

$r(\theta) = \frac{a}{\cos(\theta)} - a \tan(\theta)$

[stropho-orig](#) + vari

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 30

Gekoppelte Polardarstellung

Durchlauf 1 Pi

$$r(\theta) = \frac{a}{\cos(\theta)} - 2a \cos(\theta)$$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 31

Die Topfblume, eine freie Erfindung

Von meinem Freund Prof. Riebesehl, einem Mathematiker, der sofort kreativ wurde, als ich mit dem Buch anfang.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 32

Die Topfblume, eine freie Erfindung

Von meinem Freund Prof. Riebesehl, einem Mathematiker, der sofort kreativ wurde, als ich mit dem Buch anfang.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 33

Was habe ich im Vortrag weggelassen?

Sehr viel !

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 34

Was habe ich im Vortrag weggelassen?

- Elemente der **Analysis**
- Erfindungen durch **eigene Konstruktionen**
- Erfindungen durch **eigene Gleichungen**
- **Andere Erzeugungsweisen** von Kurven
 - **Hüllkurven** jeder Art: von Tangenten, von Normalen, von Kreisscharen....
 - Fußpunktkurven, **Inversion** am Kreis
 - **Spiralen** und **Rosetten**
 - **Zykloiden**
- Kurven für die unlösbaren Probleme
- Kegelschnitte, Anwendungen in der Technik

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 35

Bestandsaufnahme:

2000 Jahre

Mathematikgeschichte mit Kurven

50 Jahre (curriculares) Schweigen

Meine didaktisch nutzbare Literatur:
 Hermann Schmidt 1949: Ausgewählte Kurven
 Lockwood 1961: A Book of Curves
 Schupp 1993: Höhere Kurven, Kegelschnitte
 Steinberg 1995: Polarkoord. u.a.
 + Einzelnes und Versprengtes

Eine 5 pt Schrift gibt es gar nicht!

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de
 Prof. Dr. Dörte Hafendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 36

Diagnose

Die Mathematiklehre leidet an
akuter Magersucht.

Die Mathematiklehre ist schon
schlapp und kraftlos geworden,
dass sie die jungen Menschen nicht
durch's Studium tragen kann.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 37

Wege zur Heilung

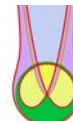
Wir sind **Berufsoptimisten** in Sachen Mathematiklehre!

Viele, die hier sitzen, bemühen sich seit Jahren!

Gemeinsam sind wir stärker!

Dieses war mein Beitrag für heute!

**Vielen Dank für Ihre
Aufmerksamkeit!**



www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, <http://www.mathematik-verstehen.de> Folie 38