1 Einleitung

Dörte Haftendorn: Kurven erkunden und verstehen
(2016) Springer Spektrum

Übersicht

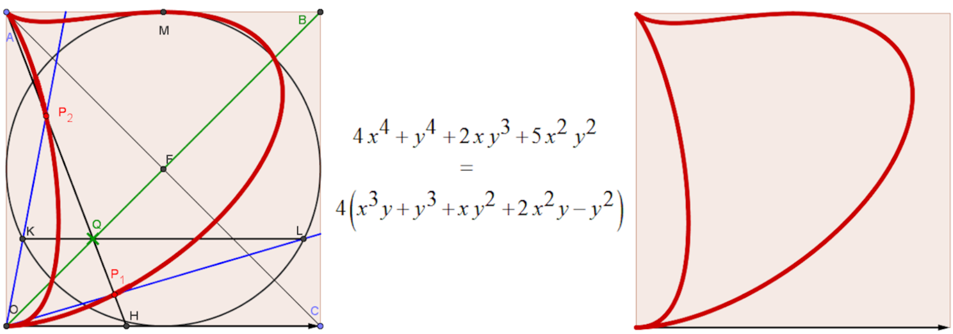

Abb. 1.1 Die D-Kurve, ihre Konstruktion, ihre Gleichung und das D als pure Kurve. Näheres siehe Abschnitt 5.1.1. Konstruktion aus [Wieleitner 1919].

In diesem Buch werden Geometrie und Gleichungen miteinander verbunden, wie es die einleitende Abbildung zeigt. Diesen Bogen von der konstruierenden Geometrie der Griechen zu Darstellungen in einem kartesischen Koordinatensystem haben als Erste die Mathematiker der Barockzeit geschlagen. Später wurden die immer weiter entwickelten Methoden der Analysis auf Kurven angewendet, bis – vor allem im 19. Jahrhundert – mit Hilfe von ursprünglich geometrischen Kurven technische Probleme gelöst wurden.

Im Zuge der theoretischen Fundierung von Mathematik und dem Ausbau der Algebra im 20. Jahrhundert trat die Beschäftigung mit Kurven in den Hintergrund, schließlich verschwand sie in den siebziger Jahre fast völlig aus den Lehrplänen der Schulen. Allenfalls interessierte man sich noch für die Kegelschnitte.

Eine Wende hätte mit dem Aufkommen der Computer eintreten können. Insbesondere Dynamische Geometriesysteme und Software, die jeden zu einer Kurve gehörigen Gleichungstyp problemlos in einen Graphen der Kurve verwandeln, sind geeignet, dieses reichhaltige mathematische Gebiet didaktisch neu zu durchdringen und für vertieftes Mathematik-Lehren und -Lernen aufzubereiten. Zwei breit angelegte Bücher, [Schupp 1988] und [Schupp und Dabrock 1995], haben dieses vor mehr als 20 Jahren zu leisten versucht, mussten aber noch auf Programmierung in damaligen Computersprachen zurückgreifen. Einige Autoren haben in Büchern und Aufsätzen und verstreuten Veröffentlichungen Anregungen zu Kurven-Aspekten gegeben: [Steinberg 1993], [Weth 1993], [Gaechter 1997], [Schupp 2000], [Weigand und Weth 2002], [Schumann 2007]. Einen Niederschlag in den Lehrplänen hat dieses kaum gefunden. Es soll zwar der Computer „sinnvoll“ in der Mathematiklehre eingesetzt werden, aber an die Möglichkeiten von Kurven denkt man bei der Curriculumgestaltung aus Mangel an Erfahrung – und an Mut zur Veränderung – eher nicht.

Eine **grundlegende Darstellung, insbesondere der höheren Kurven**, die die heutigen Möglichkeiten aufgreift und den Fokus auf das eigentätige Erkunden und Verstehen seitens der Lernenden legt, fehlt. In dieser Hinsicht soll dieses Buch einen Beitrag leisten.

1.1 Adressaten, Ziele und Aufbau des Buches

Adressaten dieses Buches sind zunächst diejenigen, die an den Hochschulen Studierende, insbesondere des Lehramts, in der **Fachwissenschaft Mathematik** ausbilden. Sie mögen sehen, wie viel solides mathematisches Handwerk und „Denkwerk“ im Thema Kurven gelernt werden kann. Daher ist auch stets die jeweilige logische Situation herausgearbeitet und die zum Thema passenden Beweise sind so ausgeführt, dass Beweiskompetenzen aufgebaut werden können. [Pólya 1949] schreibt in seinem Vorwort: „Kurzum, ich habe versucht, meine ganze Erfahrung als Forscher und Lehrer aufzubieten, um dem Leser passende Gelegenheit für intelligentes Nachahmen und selbständiges Arbeiten zu geben.“ Das könnten auch meine Worte sein.

Ziele Anderthalb Jahrzehnte Hochschullehre bestärken mich in der Auffassung, dass die Studierenden sich von diesem Thema begeistern lassen, dass sie es als Bereicherung empfinden und daher mit Engagement mathematisches Handeln lernen. Dieses gilt auch, wenn sie – wie z. B. angehende Wirtschaftspädagogen – später wohl kaum das Thema Kurven unterrichten werden.

Grundsätzlich ist „Verstehen“ ein ernst zu nehmendes Bedürfnis, das in diesem Thema in besonderes vielfältiger Weise befriedigt werden kann. Dazu dienen außer den Visualisierungen mit beweglichen Elementen auch die Vorstellung mehrerer Erzeugungsweisen für dieselbe Kurve und die Beweise auf unterschiedliche Arten. Lehrreich ist ebenfalls der gleichzeitige Blick auf die Zusammenhänge in gekoppelten Grafikfenstern: Bei Polarkurven, Lissajous-Kurven u.A. in 2D und 3D, Inversion und bei bipolaren Kurven.

Aufbau Die Inhalte der Kapitel werden im ausführlichen Inhaltsverzeichnis deutlich, daher zähle ich sie hier nicht auf. Die Kurven haben aber derartig viele Bezüge untereinander, dass man es mit einer linearen Anordnung schwer hat. Mit entsprechenden Anmerkungen im Text und Vermerken im Index habe ich versucht, Ihnen die Querverbindungen nachvollziehbar zu machen. Zum Beispiel erscheint die Ellipse schon bei der

Versiera, bei den bipolaren Kurven, bei den Stangenkonstruktionen, bei der Inversion und der Reflexion, hauptsächlich aber bei den Kegelschnitten in mehreren Konstruktionen im Zusammenhang mit Parabel und Hyperbel.

Jeder große Abschnitt beginnt mit einer einfachen „Grundkonstruktion“ und schreitet allmählich zu einer allgemeineren Definition fort, die dann das freie Erkunden mit einem „offenen“ Konstruktionsprinzip ermöglicht. Auch beim Verzicht auf rechnerische Beweise kann man wertvolle Mathematik treiben, die verbale, geometrische Begründungen zulässt. Entsprechende Unterstützung zu geben, war mir ein Anliegen.

1.2 Welche Hilfen werden bereitgestellt?

- Das Kapitel 2 stellt einen **Werkzeugkasten** zur Verfügung. Es erklärt grundsätzliche Begriffe, die im ganzen Buch wichtig sind. Weiter stellt es wesentliche Handlungsweisen vor, die überall vorkommen und durch die Aufnahme in den Werkzeugkasten nicht jedes Mal neu erklärt werden müssen. Insbesondere die schulisch weniger bekannten Konzepte wie Polarkoordinaten, Parameterkurven und 3D-Graphen sind hier ausführlich dargestellt. Auch theoretische Elemente wie der Unterschied zwischen algebraisch und transzendent werden erläutert.
- Durch den Werkzeugkasten soll es möglich sein, einzelne Kurven und Themen herauszupicken und sie zu verstehen, ohne das ganze Buch zu lesen. Dazu sieht man bei Fragen im Werkzeugkasten nach. Es ist nicht gemeint, dass man ihn erst „durcharbeiten“ sollte. *Der Sinn eines Werkzeugs erschließt sich immer erst beim Gebrauch.*
- In Kapitel 3 ist das Vorgehen „für Einsteiger“ besonders sorgfältig erläutert.
- Ein **Anhang zur Analysis** stellt nicht nur die Begriffe und Formeln für Steigung, Fläche, Volumen, Bogenlänge und Krümmung für die verschiedenen Gleichungstypen vor, sondern erklärt sie auch in einer verständlichen Form. Die Konzepte für Steigung, Ableitung und Integral für Funktionen werden auch knapp dargestellt, obwohl sie schulüblich sind.
- Das Kapitel 10 zur **Didaktik** ist nicht nur für Lehrende geschrieben, sondern gibt auch Hinweise für Menschen, die sich allein mit den Kurven beschäftigen wollen. Es sind Voraussetzungen und Schwierigkeit der Themen genannt.
- Auf die Erstellung eines hilfreichen **Index’** ist besonderer Wert gelegt. Sie finden dort auch Einträge zu *Hantierung mit Seilen, Stangen, Pappen*, *experimentieren*, *beweisen mit GeoGebra*, *argumentieren*, *systematisieren* und ähnliche, die helfen sollen, das für Sie Richtige im Buch zu finden.
- Das **Literaturverzeichnis** enthält direkte Links. Zu empfehlen sind die (englischsprachigen) Internetseiten [Famous Curves Index], [2dcurves Website], [Xah Lee Website] und [Math-World] auf denen Sie sehr viele Kurven in schönen Darstellungen finden können.
- Dieses Buch versucht, nicht nur die **Kurven** zu präsentieren, sondern das **Erkunden und Verstehen** zu unterstützen.

1.3 Website zum Buch, Tipps und Fazit

- Website zum Buch: der Link ist `www.kurven-erkunden-und-verstehen.de`. Die Website spiegelt die Gliederung des Buches wider, so können Sie sich zurechtfinden.
- Es gibt alle Dateien, mit denen die Bilder des Buches erzeugt wurden, zum kostenlosen Herunterladen aus dem Internet von der Website zum Buch.
- Aufgaben und Fragestellungen ohne Nummer sind vielfach eingestreut. Für die nummerierten Aufgaben gibt es ein Verzeichnis, da man sie sonst schlecht findet.
- Es gibt Aufgaben, die eigenes Fragen und Erkunden anregen. Auch deren Lösungsvorschläge sind auf der Website zum Buch. Wenn Fragen übrig bleiben, wenden Sie sich an die Autorin.
- Es ist gut denkbar, in der Lehre nur die eine oder andere Kurve und ihre Behandlung vorzustellen und weitere Kurven der eigenen Erarbeitung der Lernenden zu überlassen.
- Es ist auch gut denkbar, sich auf die Geometrie und die kartesischen Formeln zu beschränken und andere Darstellungen wegzulassen. Suchen Sie sich Ihren Weg!
- Es bietet sich an, dass eine Lerngruppe „Poster“ zu einzelnen Kurven oder Themen erstellt. Einige Konstruktionen eignen sich für großformatige Realisierungen auf dem Schulhof.
- Bei vielen Kurven sind die Definitionen so offen formuliert, dass reichlich Raum für Ergänzungen bleibt, deren Untersuchung sich dann mit den gelernten Methoden lohnt.
- Da Kurvengleichungen in jeder Form eingegeben werden können, wird umfassendes Experimentieren möglich. Insbesondere können Eigenschaften vermutet werden. Wenn sie dann bei Parametervariation erhalten bleiben, kann die Suche nach einem Beweis angeregt werden. So wird in einem spiraligen Prozess Mathematik betrieben.

Fazit: Durch meinen Werdegang stehe ich wohl nicht im Verdacht, dass ich durch den Computer die Mathematik verdrängen wollte. Ich zitiere:

> „Es ist unwürdig, die Zeit von hervorragenden Leuten mit knechtischen Rechenarbeiten zu verschwenden, weil bei Einsatz einer Maschine auch der Einfältigste die Ergebnisse sicher hinschreiben kann.“ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Bezogen auf die Kurven ist es nicht das Rechnen, sondern das **schnelle Darstellen**, das einen ähnlich revolutionär anderen Umgang mit ihnen erlaubt, wie damals (in Leibniz’ prophetischer Vorstellung) die Erfindung der Rechenmaschine den Wert des Zahlenrechnens verändert hat.

Vielleicht ist es heute unwürdig, die lernenden Menschen mit dem „abgemagerten Gerippe“ von Mathematik abzuspeisen, wie es die Curricula als Mindestforderung beschreiben, und „zum Ausgleich“ angehenden Lehrpersonen in nicht unbeträchtlichem Teil ihrer Studienzeit schulisch nicht verwertbare „unverdauliche Kost“ zu servieren.