

# Inhaltsverzeichnis

Dörte Haftendorn: Kurven erkunden und verstehen  
(2016) Springer Spektrum

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Adressaten, Ziele und Aufbau des Buches	2
1.2	Welche Hilfen werden bereitgestellt?	3
1.3	Website zum Buch, Tipps und Fazit	4
<b>2</b>	<b>Werkzeugkasten</b>	<b>5</b>
2.1	Wie entsteht eine Kurve geometrisch?	5
2.2	Was bedeuten Gleichungen mit $x$ und $y$ ?	6
2.2.1	Punkte und Geraden	7
2.2.2	Kreise und Grundlegendes	8
2.2.3	Allgemeine Kurvengleichung und Verschiebung	9
2.3	Was sind Polarkoordinaten?	12
2.3.1	Polarkoordinaten lesen und verstehen	13
2.3.2	Polarkurven	14
2.3.3	Zeichnen von Polarkurven	15
2.3.4	Gekoppelte polar-kartesische Darstellung von Kurven	16
2.4	Was ist eine Parameterdarstellung?	18
2.4.1	Schnelle Zeichnung von Parameterkurven	19
2.4.2	Parameterdarstellung doppelt-kartesisch	19
2.4.3	Gebiet der Ebene in Parameterdarstellung	20
2.4.4	Wie rechnet man eine Darstellung in eine andere um?	20
2.5	Was sind Kurven und ihre grundlegenden Kurventypen?	22
2.5.1	Was ist eine algebraische Kurve?	22
2.5.2	Was ist eine transzendente Kurve?	25
2.6	Was haben Kurven mit dem 3D-Raum zu tun?	27
2.6.1	Wie entsteht eine Raumfläche aus einer Kurvengleichung?	27
2.6.2	Raumkurven und Raumflächen in anderen Darstellungen	28
2.7	Tipps für GeoGebra	31
2.7.1	Wo findet man GeoGebra und die Website zum Buch?	31
2.7.2	Wichtige Tipps für Kurven	32
2.7.3	Was (noch) nicht geht in GeoGebra	34
2.8	Tipps zu weiterer Mathematik-Software	35
2.8.1	Tipps für CAS-Taschenrechner	35
2.8.2	Tipps für Wolfram-Alpha und Mathematica	35
2.8.3	Tipps für Programme zur Raumgeometrie	36
2.8.4	Cinderella und andere starke Mathematik-Systeme	36
2.8.5	Blick zurück und nach vorn	36
<b>3</b>	<b>Klassische Kurven ohne Ende</b>	<b>37</b>
3.1	Konchoiden: die Hundekurve und ihre Verwandten	38
3.1.1	Konchoide des Nikomedes, genannt Hundekurve	38
3.1.2	Allgemeine Definition der Konchoiden	43

3.1.3	Polargleichungen der Konchoiden	44
3.1.4	Pascal'sche Schnecken oder die Limaçon	46
3.1.5	Formenreichtum der Konchoiden	49
3.2	Strophoiden: die Seilkurve und ihre Verwandten	50
3.2.1	Gerade Strophoide	50
3.2.2	Allgemeine Strophoide	58
3.2.3	Schiefe Strophoide	58
3.2.4	Noch allgemeinere Strophoiden	60
3.3	Trisektrix	62
3.3.1	Die Trisektrix von Maclaurin	62
3.4	Cissoiden: die Efeukurve und ihre Verwandten	64
3.4.1	Die Cissoide des Diokles	65
3.4.2	Allgemeine Cissoide	67
3.4.3	Die allgemeine Polargleichung der Cissoide	68
3.4.4	Die klassischen Kurven als Cissoiden	70
3.4.5	Geometrie aus der Polargleichung erfinden	71
3.4.6	Noch allgemeinere Cissoiden	73
3.5	Analysis-Anwendungen bei den klassischen Kurven	74
<b>4</b>	<b>Barocke Blüten und Früchte</b>	<b>79</b>
4.1	Versiera, die Hexenkurve	79
4.1.1	Die (weite) Versiera	80
4.1.2	Die enge und die weite Versiera	82
4.1.3	Versiera und ihre Rotation um die x-Achse	84
4.1.4	Allgemeine Versiera	86
4.2	Neil'sche Parabel und andere Kubiken	91
4.2.1	Klassifikation der Kubiken	92
4.2.2	Graphen der Kubiken vom Typ II., IV., III. und I	93
4.3	Cassini'sche Kurven und andere bipolare Kurven	99
4.3.1	Cassini'sche Kurven konkret	101
4.3.2	Bipolare Kurven mit beliebigen Gleichungen für $r$ und $r'$	104
4.4	Lemniskaten und andere Gelenkkonstruktionen	108
4.4.1	Bernoulli'sche Lemniskate	108
4.4.2	Noch mehr Lemniskaten	116
4.4.3	Gelenke und Stangenkonstruktionen	119
4.4.4	Konstruktion der Kegelschnitte mit einem Faden	121
4.4.5	Spezielle Ellipsen-Zirkel und Stangenkonstruktion der Ellipse	123
4.4.6	Dampfmaschine und andere technische Gelenke	125
4.4.7	Ausblick	132
<b>5</b>	<b>Frei erfunden und hoch hinaus</b>	<b>133</b>
5.1	Frei erfundene geometrisch erzeugte Kurven	133
5.1.1	Die D-Kurve aus der Einleitung	134
5.1.2	Die deutsch- $d$ -Kurve	135

- 5.1.3 Die Topfblumen-Kurven ..... 136
- 5.1.4 Das gefangene Zweiblatt ..... 139
- 5.2 Frei erfundene Gleichungen und ihre Kurven ..... 141
  - 5.2.1 Term-Sensibilisierung ..... 142
  - 5.2.2 „Konchoiden“ von Baron de Sluze ..... 143
  - 5.2.3 Wandelfisch ..... 144
  - 5.2.4 Mathematik und eigene Erfindungen ..... 147
- 5.3 Hoch hinaus in den Raum ..... 147
  - 5.3.1 Familien der raumverwandten Kurven ..... 148
  - 5.3.2 Raumflächen durch Rotation der Kurven ..... 149
  - 5.3.3 Produkte aus Kurven ..... 152
  - 5.3.4 Klein’sche Quartiken ..... 153
  - 5.3.5 Quadriken ..... 155
  - 5.3.6 Harmonie der rotierten Quadriken ..... 159
  - 5.3.7 Exotische Raumflächen ..... 160
- 6 Die unlösbaren Probleme der Antike ..... 161**
- 6.1 Die Unlösbarkeit ..... 162
  - 6.1.1 Winkeldritteler, Würfelverdoppler und Kreisquadrierer ..... 162
  - 6.1.2 Algebra und die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal ..... 162
- 6.2 Beliebige Winkel in n Teile teilen ..... 165
  - 6.2.1 Winkel dritteln ..... 166
  - 6.2.2 Konstruierbare Winkel mit natürlichem Winkelgrad ..... 167
  - 6.2.3 Die Dreiteilung des Winkels mit der Konchoide ..... 168
  - 6.2.4 Die n-Teilung des Winkels mit der archimedischen Spirale ..... 169
  - 6.2.5 Winkeldritteln mit der Trisektrix und anderen Kurven ..... 170
- 6.3 Würfel verdoppeln, Delisches Problem ..... 170
- 6.4 Die konstruierbaren n-Ecke ..... 171
  - 6.4.1 Das Siebeneck oder Heptagon ..... 171
  - 6.4.2 Welche n-Ecke sind konstruierbar? ..... 173
- 6.5 Kreis quadrieren ..... 174
  - 6.5.1  $\pi$ -Konstruktion als neuer Problemtypus ..... 174
  - 6.5.2 Die Quadratrix ..... 175
  - 6.5.3 Archimedes, Leonardo da Vinci und Weiteres ..... 176
- 6.6 Zirkel, Lineal und Parabellineal ..... 177
  - 6.6.1 Gleichungen dritten Grades und Quasikonstruktionen ..... 177
  - 6.6.2 Weitere exakte Konstruktionen mit Parabellineal ..... 178
- 6.7 Archimedes und die Quadratur der Parabel ..... 179
- 7 Kegelschnitte ..... 181**
- 7.1 Kegelschnitte, die berühmteste Kurvenfamilie ..... 181
  - 7.1.1 Allgemeine 2D-Quadrikgleichung ..... 182
  - 7.1.2 Fazit zu den Quadriken ..... 185
- 7.2 Gemeinsame Konstruktionen ..... 185

7.2.1	Faden-Konstruktionen . . . . .	186
7.2.2	Leitgeraden-Konstruktion aller Kegelschnitte . . . . .	188
7.2.3	Leitkreis-Konstruktion . . . . .	192
7.3	Beweise mit Dandelin'schen Kugeln . . . . .	194
7.3.1	Dandelin'sche Kugeln für die Ellipse . . . . .	194
7.3.2	Dandelin'sche Kugel für die Parabel . . . . .	195
7.3.3	Dandelin'sche Kugeln für die Hyperbel . . . . .	195
7.3.4	Ellipsensalami . . . . .	195
7.4	Namensgeheimnis der Kegelschnitte . . . . .	196
7.5	Reflexion und Tangenten an Kegelschnitten . . . . .	197
7.5.1	Tangenten, Leitkreis und Leitgerade . . . . .	198
7.5.2	Tangenten- und Normalengleichungen bei Kegelschnitten . . . . .	201
7.5.3	Reflexion an den Kegelschnitten . . . . .	202
7.6	Anwendungen der Kegelschnitte . . . . .	203
7.6.1	Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als Formen in unserer Welt . . . . .	203
7.6.2	Anwendungen, die die Reflexionseigenschaften nutzen . . . . .	207
7.6.3	Projektion der Kegelschnitte . . . . .	209
7.7	Extras und Aufgaben . . . . .	212
7.7.1	Krümmungskreise von Ellipse, Hyperbel und Parabel . . . . .	212
7.7.2	Spannende Weiterführungen und Aufgaben . . . . .	213
<b>8</b>	<b>Kurven mit Drehwurm . . . . .</b>	<b>219</b>
8.1	Spiralen . . . . .	219
8.1.1	Archimedische Spirale . . . . .	221
8.1.2	Die Königin der Spiralen . . . . .	223
8.1.3	Spiralen, systematisch betrachtet und frei erfunden . . . . .	229
8.2	Rosetten . . . . .	235
8.2.1	Grundlage für die Rosetten . . . . .	236
8.2.2	Rosette als Fußpunktkurve der Astroide . . . . .	240
8.2.3	Rosetten mit variabler Blattgröße . . . . .	241
8.3	Rollkurven . . . . .	243
8.3.1	Zykloiden . . . . .	243
8.3.2	Trochoiden . . . . .	246
8.3.3	Rollende Parabel und die Kettenlinie . . . . .	249
8.4	Schwingungen . . . . .	251
8.4.1	Sinus- und Kosinusschwingung . . . . .	251
8.4.2	Lissajous-Kurven . . . . .	251
<b>9</b>	<b>Besondere Erzeugungsweisen für Kurven . . . . .</b>	<b>255</b>
9.1	Fußpunktkurven . . . . .	255
9.1.1	Fußpunktkurve einer Parabel . . . . .	256
9.1.2	Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben . . . . .	261
9.1.3	Negative Fußpunktkurven . . . . .	263
9.2	Enveloppen, Evoluten, Involuten, Evolventen . . . . .	264

- 9.2.1 Hüllkurven allgemein . . . . . 265
- 9.2.2 Naum-Gabo-Kurven und grundlegendes Vorgehen . . . . . 265
- 9.2.3 Parabel als Hüllkurve mit der Extremum-Methode . . . . . 268
- 9.2.4 Astroide und die rutschende Leiter . . . . . 269
- 9.3 Evoluten als Hüllkurven von Normalenscharen . . . . . 270
  - 9.3.1 Evolute einer Parabel . . . . . 271
  - 9.3.2 Kurvenpaare vom Typ: Involute und Evolute . . . . . 272
  - 9.3.3 Evolventen und Parallelkurven . . . . . 273
- 9.4 Reflexion und Kaustiken . . . . . 275
  - 9.4.1 Kardioide, die Herzkurve . . . . . 275
  - 9.4.2 Nephroide, die Nierenkurve . . . . . 280
  - 9.4.3 Reflexionen an beliebigen Kurven . . . . . 283
- 9.5 Inversion am Kreis . . . . . 284
  - 9.5.1 Erste Erfahrungen mit der Kreisspiegelung . . . . . 284
  - 9.5.2 Inversion von Kurven . . . . . 287
  - 9.5.3 Kartesische Abbildungsgleichungen . . . . . 290
  - 9.5.4 Anallagmatische Kurven . . . . . 291
  - 9.5.5 Inversion der Kegelschnitte als Aufgaben . . . . . 292
  - 9.5.6 Inversion von Kurven als Aufgaben . . . . . 294
- 9.6 Exoten-Kurven . . . . . 296
  - 9.6.1 Kurven mit natürlicher Gleichung . . . . . 296
  - 9.6.2 Klothoide . . . . . 297
  - 9.6.3 Traktrix oder Schleppkurve . . . . . 298
  - 9.6.4 Kettenlinie, Kosinus- und Sinus hyperbolicus . . . . . 300
- 10 Didaktische Übersicht . . . . . 307**
- 10.1 Grundlegendes zur Didaktik der Kurven . . . . . 307
  - 10.1.1 Das Thema Kurven heute . . . . . 307
  - 10.1.2 Blick zurück und nach vorn . . . . . 308
  - 10.1.3 Didaktische Gründe für den Softwareeinsatz . . . . . 308
  - 10.1.4 Wie kann man das freie Erkunden anregen? . . . . . 309
  - 10.1.5 Was heißt eigentlich „Verstehen“? . . . . . 310
- 10.2 Was passt zu welchem Vorwissen? . . . . . 311
  - 10.2.1 Der Start, geeignet für die Jüngsten . . . . . 311
  - 10.2.2 Der zweite Schritt, geeignet für die Jugendlichen . . . . . 312
  - 10.2.3 Letzter Schritt in die Freiheit . . . . . 313
  - 10.2.4 Blackbox-Whitebox-Prinzip . . . . . 313
  - 10.2.5 Begabtenförderung . . . . . 314
- 10.3 Lehramt Mathematik, Mathematik BA u.s.w . . . . . 314
- 11 Anhang: Elemente der Analysis für Kurven . . . . . 315**
- 11.1 Kurven im Blick der Analysis . . . . . 316
- 11.2 Steigung und Ableitung . . . . . 316
  - 11.2.1 Steigung und Ableitung, explizit kartesisch . . . . . 316

11.2.2	Implizite kartesische Ableitung . . . . .	317
11.2.3	Steigung und Ableitung in Parameterdarstellung . . . . .	317
11.2.4	Steigung bei Polarkurven . . . . .	318
11.2.5	Gleichungen von Tangente und Normale . . . . .	320
11.3	Flächen und Volumina der Rotationskörper . . . . .	320
11.3.1	Fläche bei Funktionen und expliziten Gleichungen . . . . .	320
11.3.2	Kurven in Parameterdarstellung . . . . .	321
11.3.3	Flächen bei Polarkurven . . . . .	321
11.3.4	Volumen von Rotationskörpern . . . . .	322
11.4	Bogenlänge . . . . .	324
11.4.1	Bogenlänge bei Funktionen und Parameterkurven . . . . .	324
11.4.2	Bogenlänge bei Polarkurven . . . . .	324
11.5	Krümmungen . . . . .	325
11.5.1	Definition der Krümmung und interaktive Zugänge . . . . .	325
11.5.2	Herleitung der kartesischen Krümmungsformel aus der Definition . . . . .	327
11.5.3	Krümmungsformel für Polarkurven . . . . .	327
11.5.4	Orientierung von Kurven . . . . .	328
11.5.5	Wirkung des Vorzeichens der Krümmung . . . . .	329
	<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	331
	<b>Index</b> . . . . .	337