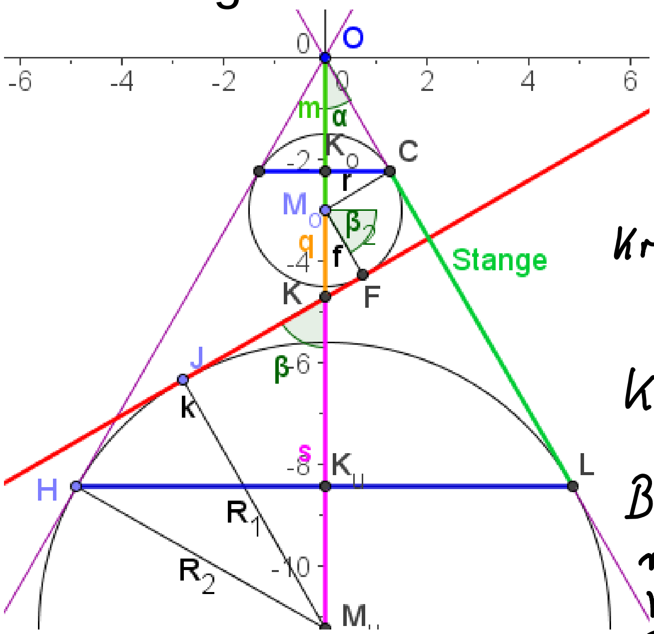
Dandelinsche Kugeln im Kegel, Berechnungen für die Zeichnung



$d := q + s \qquad r = m \sin\alpha$

$R = (m+d)\sin\alpha$

Kugel oben $M_o = (0,0,-m)$

unten $M_u = (0,0,-m-d)$

Kreis oben $\overline{OC} = m\cos\alpha$

$\overline{OK_o} = \overline{OC}\cdot\cos\alpha = m\cos^2\alpha$

$K_oC = \overline{OC}\cdot\sin\alpha = m\sin\alpha\cos\alpha$

Kreis unten $\overline{OK_u} = (m+d)\cos^2\alpha$

$K_uL = (m+d)\sin\alpha\cos\alpha$

Bestimmung von d:

$\left.\begin{array}{l} r = q\sin\beta \\ r = m\sin\alpha \end{array}\right\} q = m\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$\left.\begin{array}{l} R = s\sin\beta \\ R = (m+d)\sin\alpha \end{array}\right\} s = (m+d)\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$d = q + s = 2m\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} + d\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$d\sin\beta - d\sin\alpha = 2m\sin\alpha \quad \to \quad d = \dfrac{2m\sin\alpha}{\sin\beta - \sin\alpha}$

Brennpunkte $F_1 = (u_1, v_1)$ $\quad v_1 = -m - r\sin\beta = -m - m\sin\alpha\sin\beta$

$u_1 = r\cos\beta = m\sin\alpha\cos\beta$

$F_2 = (u_2, v_2)$ $\quad v_2 = -(m+d) - (m+d)\sin\alpha\sin\beta$

$u_2 = (m+d)\sin\alpha\sin\beta$

Stange oberer Pkt $\quad x = m\sin\alpha\cos\alpha\cos t$

$y = m\sin\alpha\cos\alpha\sin t$

$z = -m\cos^2\alpha$

unterer Pkt ebenso $m+d$ statt m

Ebene Normalenvektor durch $\begin{pmatrix}0\\0\\-m-q\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}-u_1\\0\\-v_1-m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-m\sin\alpha\cos\beta\\0\\m\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-\cos\beta\\0\\\sin\beta\end{pmatrix} =: \vec{n}$

$-\cos\beta\, x + \sin\beta\, z = -m(\sin\alpha + \sin\beta)$

Ein Punkt P auf Stange, Tiefe $-h$

$x = r(h)\cos t \qquad y = r(h)\sin t \qquad z = -h$

$* \| \; x = h\tan\alpha\cos t \qquad y = h\tan\alpha\sin t \qquad z = -h \; \|$

liegt auf Ebene: $-\cos\beta\, h\tan\alpha\cos t + \sin\beta(-h) = -m(\sin\alpha + \sin\beta)$

$\Rightarrow h = h(t) = (\cos\beta\tan\alpha\cos t + \sin\beta)^{-1}\cdot m(\sin\alpha + \sin\beta)$

$*$ ist mit $h(t)$ Parameterdarst. von P auf der Ellipse.

Nach Wahl von α, β und m kann man nun die Zeichnung herstellen, die mit den Dandelinschen Kugeln zeigt:

$\boxed{\text{Satz: Kegelschnitte mit } \alpha < \beta \text{ sind Ellipsen}}$