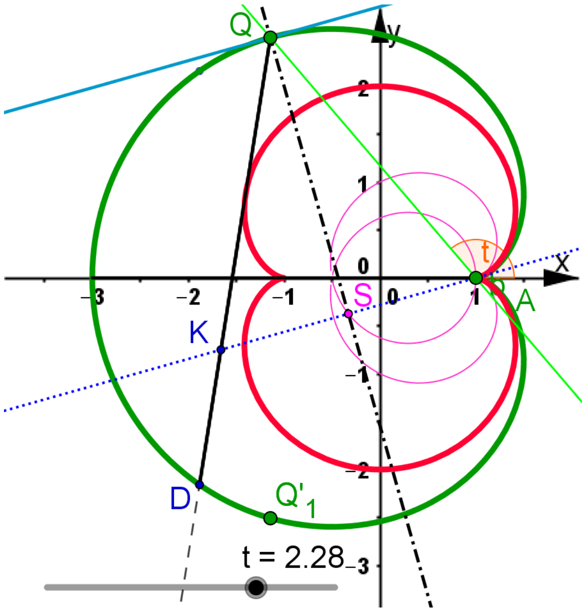
Kurven sehen und verstehen

Haftendorn März. 2017, http://www.kurven-sehen-und-verstehen.de

Eine Kaustik der Kardioide ist Nephroide




```
Strategie : Lot auf die Normale, dann A an S spiegeln,
A' = K, die Geraden QK erzeugen die Hüllkurve
```

Kardioide, Wanderkreis um O mit Radius $\frac{a}{3}$, Leine $\frac{2a}{3}$, Baum $\left(\frac{-a}{3}, 0\right)$

In[322]:= $x[t\_] := \frac{a}{3}\left(2\,\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Cos}[2\,t]\right)$ (Kosinus, Kosinus)

$y[t\_] := \frac{a}{3}\left(2\,\mathrm{Sin}[t] - \mathrm{Sin}[2\,t]\right)$ (Sinus, Sinus)

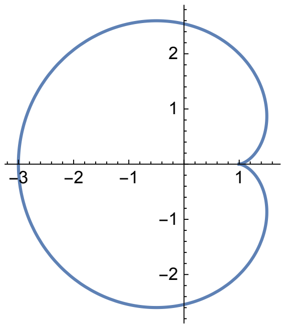
```
In[241]:= M = {0, 0} (* Mittelpunkt des Wanderkreises, r ist sein Radius *)
Out[241]= {0, 0}
```

Der “Baum “ steht bei A=(r,0) mit k=2r, mit $r = \frac{a}{3}$.

Der **Parameter t ist der Polarwinkel bezogen auf den Baum A.**

In[242]:= `a = 3; ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2 Pi}]`
parametrische Darstellung Kreisz

`a =.`

Out[242]=


Elimination

In[324]:= `Eliminate[{x == a/3 (2 c - c^2 + s^2), y == a/3 (2 s - 2 s c), s^2 + c^2 == 1}, {s, c}] // FullSimplify`
eliminiere vereinfache vollstänc

Out[324]= $(a - 3x)^3 (a + x) + 18 (a^2 - 3x^2) y^2 == 27 y^4$

$(a - 3x)^3 (a + x) + 18 (a^2 - 3x^2) y^2 == 27 y^4$ `(* richtig *)`

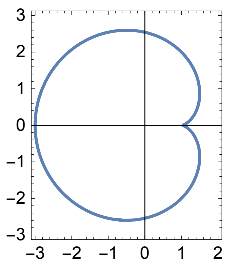
Nullstellen

In[245]:= `Solve[(a - 3 x)^3 (a + x) == 0, {x}] (* Nullstellen *)`
löse

Out[245]= $\{\{x \to -a\}, \{x \to \frac{a}{3}\}, \{x \to \frac{a}{3}\}, \{x \to \frac{a}{3}\}\}$

In[248]:= `a = 3;`
`ContourPlot[(a - 3 x)^3 (a + x) + 18 (a^2 - 3 x^2) y^2 == 27 y^4,`
Konturgraphik
`{x, -3, 2}, {y, -3, 3}, AspectRatio → Automatic, Axes → True]`
Seitenverhältnis automatisch Axen wahr

`a =.`

Out[248]=


Rechnungen zu Tangenten

In[325]:=
```
D[x[t], t]
D[y[t], t]
```
leite ab

Out[325]= $\frac{1}{3} a \left(-2 \operatorname{Sin}[t] + 2 \operatorname{Sin}[2 t]\right)$

Out[326]= $\frac{1}{3} a \left(2 \operatorname{Cos}[t] - 2 \operatorname{Cos}[2 t]\right)$

Steigung bei Parameterwert t.

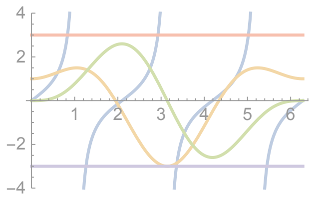
In[329]:= $m[t\_] := \frac{\operatorname{Cos}[t] - \operatorname{Cos}[2 t]}{-\operatorname{Sin}[t] + \operatorname{Sin}[2 t]}$ `// FullSimplify; m[t]`

vereinfache vollständig

Out[329]= $\operatorname{Tan}\left[\frac{3 t}{2}\right]$

```
a = 3; Plot[{m[t], x[t], y[t], 3, -3}, {t, 0, 2 Pi}, PlotRange → {-4, 4}]
a =.;   (* y oliv *)
```
stelle Funktion graphisch dar | Kre··· | Koordinatenbereich der Grapl

Out[260]=



Gerade AQ

In[266]:=
```
gaq = y == Tan[t] (x - x[t]) + y[t] // FullSimplify
```
Tangente | vereinfache vollstä

Out[266]= $3 y + a \operatorname{Tan}[t] == 3 x \operatorname{Tan}[t]$

Einfallslot

$ei = y == \frac{-1}{m[t]} (x - x[t]) + y[t]$ `// FullSimplify`

vereinfache vollstä

Out[269]= $3 y == \frac{\left(a + 3 x - 6 x \operatorname{Cos}[t]\right) \operatorname{Sin}[t]}{\operatorname{Cos}[t] - \operatorname{Cos}[2 t]}$

In[270]:= $eisc = ei\ /.\ \left\{\operatorname{Cos}[t] \to c,\ \operatorname{Sin}[t] \to s,\ \operatorname{Cos}[2 t] \to c^2 - s^2\right\}$

Kosinus | Sinus | Kosinus

Out[270]= $3 y == \frac{s \left(a + 3 x - 6 c x\right)}{c - c^2 + s^2}$

Lot von $\left(\frac{a}{3},0\right)$ auf das Einfallslot ist parallel zur Tangente

In[330]:= $\texttt{lot} = y == m[t]\left(x - \frac{a}{3}\right)$

Out[330]= $y == \left(-\frac{a}{3} + x\right) \mathrm{Tan}\left[\frac{3\,t}{2}\right]$

In[273]:= $\texttt{lotsc} = \texttt{lot} \;/.\; \{\mathrm{Cos}[t] \to c,\ \mathrm{Sin}[t] \to s,\ \mathrm{Cos}[2\,t] \to c^2 - s^2,\ \mathrm{Sin}[2\,t] \to 2\,s\,c\}$
Kosinus Sinus Kosinus Sinus

Out[273]= $y == \frac{\left(c - c^2 + s^2\right)\left(-\frac{a}{3} + x\right)}{-s + 2\,c\,s}$

Schnitt mit dem Einfallslot

In[275]:= $\mathrm{Eliminate}\left[\left\{\texttt{lotsc}, \texttt{eisc}, s^2 + c^2 == 1\right\}, \{s, c\}\right] \;//\; \mathrm{FullSimplify}$
eliminiere vereinfache vollständig

Out[275]= $(a - 3\,x)^4\,(a + 6\,x)^2 + 2916\,y^6 ==$
$18\,(a - 3\,x)\left(a^3 - 9\,a^2\,x - 54\,a\,x^2 + 162\,x^3\right) y^2 + 243\left(a^2 + 12\,a\,x - 36\,x^2\right) y^4$

Das ist die **Kurve der Lotfußpunkte** und die passt zu GeoGebra

In[278]:= $\mathrm{Solve}[\{\texttt{lotsc}, \texttt{eisc}\}, \{x, y\}] \;//\; \mathrm{FullSimplify}$
löse vereinfache vollständig

Out[278]= $\left\{\left\{x \to \frac{a\left((-1+c)^2\,c^2 + (-1 - 2\,(-2+c)\,c)\,s^2 + s^4\right)}{3\left((-1+c)^2 + s^2\right)\left(c^2 + s^2\right)},\ y \to \frac{2\,a\,(-1+c)\,s\left((-1+c)\,c - s^2\right)}{3\left((-1+c)^2 + s^2\right)\left(c^2 + s^2\right)}\right\}\right\}$

Rücksubstitution für den Lotfußpunkt S

In[331]:= $\texttt{xs} = \frac{a\left((-1+c)^2\,c^2 + (-1 - 2\,(-2+c)\,c)\,s^2 + s^4\right)}{3\left((-1+c)^2 + s^2\right)\left(c^2 + s^2\right)} \;/.\; \{s \to \mathrm{Sin}[t],\ c \to \mathrm{Cos}[t]\} \;//\; \mathrm{FullSimplify}$
Sinus Kosinus vereinfache vollst

Out[331]= $\frac{1}{6}\,a\,(1 + \mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Cos}[2\,t] - \mathrm{Cos}[3\,t])$

In[332]:= $\texttt{ys} = \frac{2\,a\,(-1+c)\,s\left((-1+c)\,c - s^2\right)}{3\left((-1+c)^2 + s^2\right)\left(c^2 + s^2\right)} \;/.\; \{s \to \mathrm{Sin}[t],\ c \to \mathrm{Cos}[t]\} \;//\; \mathrm{FullSimplify}$
Sinus Kosinus vereinfache vollst

Out[332]= $\frac{1}{6}\,a\,(\mathrm{Sin}[t] + \mathrm{Sin}[2\,t] - \mathrm{Sin}[3\,t])$

Spiegelung von A am Lotfußpunkt S (S muss Mitte von AK sein)

In[319]:=
$$xk = 2\,xss - \frac{a}{3}$$
$$yk = 2\,yss$$

Out[319]=
$$-\frac{a}{3} + \frac{1}{3}\,a\,(1 + \mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Cos}[2\,t] - \mathrm{Cos}[3\,t])$$

Out[320]=
$$\frac{1}{3}\,a\,(\mathrm{Sin}[t] + \mathrm{Sin}[2\,t] - \mathrm{Sin}[3\,t])$$

Das ist der Punkt K, durch den die gespiegelte Gerade gehen muss.

Gespiegelte Gerade zu AQ

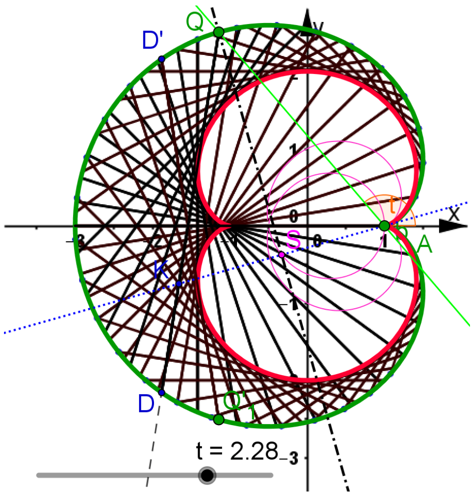
In[333]:=
$$spiegel = y == \frac{y[t] - yk}{x[t] - xk}\,(x - x[t]) + y[t]\ \text{// FullSimplify}$$
vereinfache vollst

Out[333]=
$$3\,y + 2\,a\,\mathrm{Sec}[2\,t]\,\mathrm{Sin}[t] == 3\,x\,\mathrm{Tan}[2\,t]$$

In[380]:=
$$y == x\,\mathrm{Tan}[2\,t] - \frac{2}{3}\,a\,\mathrm{Sec}[2\,t]\,\mathrm{Sin}[t]\quad \text{(* gespiegelte Gerade*)}$$
Tangente Sekante Sinus

Out[380]=
$$y == -\frac{2}{3}\,a\,\mathrm{Sec}[2\,t]\,\mathrm{Sin}[t] + x\,\mathrm{Tan}[2\,t]$$

In[343]:=
$$f[x\_] := x\,\mathrm{Tan}[2\,t] - \frac{2}{3}\,a\,\mathrm{Sec}[2\,t]\,\mathrm{Sin}[t]$$
Tangente Sekante Sinus



Hüllkurve

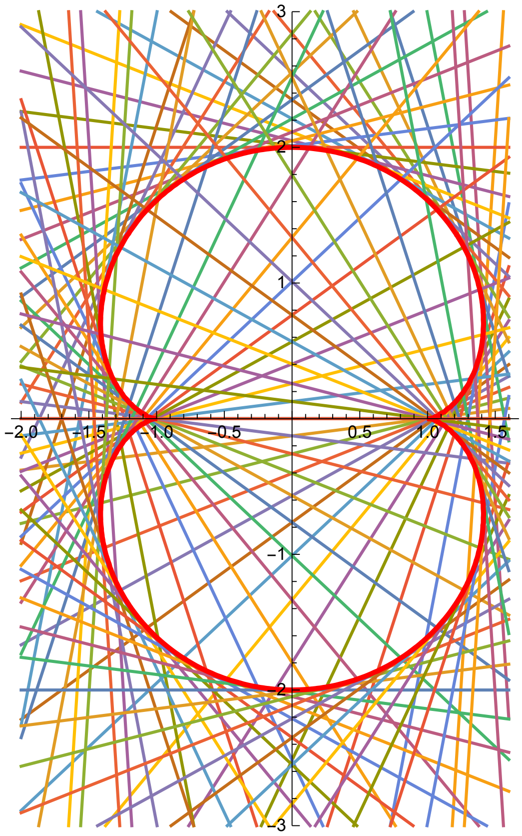
In[344]:=
$$a = 3;\ alle = \mathrm{Table}\Big[x\,\mathrm{Tan}[2\,t] - \frac{2}{3}\,a\,\mathrm{Sec}[2\,t]\,\mathrm{Sin}[t],\ \Big\{t, 0, 2\,\mathrm{Pi}, \frac{\mathrm{Pi}}{50}\Big\}\Big];$$
Tabelle Tangente Sekante Sinus Kreiszahl π

In[360]:=
```
alleBild = Plot[alle, {x, -2, 1.6}, PlotRange → {-3, 3}, AspectRatio → Automatic];
```
stelle Funktion graphisch dar Koordinatenbereich der Gr··· Seitenverhältnis automatisch

In[357]:=
```
a = 1;
nephi = ContourPlot[4 a^6 + 3 a^4 (5 y^2 - 4 x^2) + 12 a^2 (x^2 + y^2)^2 == 4 (x^2 + y^2)^3,
    {x, -2, 3}, {y, -2, 2}, ContourStyle → {Thickness[0.01], Red}];
a =.
```
Konturgraphik Konturenstil Dicke rot

In[359]:=
```
Show[alleBild, nephi]
```
zeige an

Out[359]=



Berechnung der Hülllkurve, Nephroide mit a=1 aufrecht

In[362]:=
```
abl = D[ x Tan[2 t] - 2/3 a Sec[2 t] Sin[t], t] // FullSimplify
```
leit·· Tangente Sekante Sinus vereinfache vollst

In[364]:=
```
ablsc = 1/3 (6 x - 3 a Cos[t] + a (Cos[3 t] // TrigExpand)) (Sec[2 t] // TrigExpand)^2 /.
    {Sin[t] → s, Cos[t] → c}
```
Kosinus Kosinus erweitere trigonometrische Funktion Sinus Kosinus

Out[364]=

$$\frac{-3\,a\,c + a\,(c^3 - 3\,c\,s^2) + 6\,x}{3\,(c^2 - s^2)^2}$$

In[383]:=
```
spiegelsc =
 (y == -2 a/3 Sec[2 t] Sin[t] + x Tan[2 t] // TrigExpand) /. {Sin[t] → s, Cos[t] → c}
```
Sekante Sinus Tangente erweitere trigonomet·· Sinus Kosinus

Out[383]= $y == -\frac{2\,a\,s}{3\,(c^2 - s^2)} + \frac{2\,c\,s\,x}{c^2 - s^2}$

In[386]:=
```
Eliminate[{(-3 a c + a (c^3 - 3 c s^2) + 6 x)/(3 (c^2 - s^2)^2) == 0, y == -(2 a s)/(3 (c^2 - s^2)) + (2 c s x)/(c^2 - s^2), c^2 + s^2 == 1}, {s, c}] //
  FullSimplify
```
eliminiere

vereinfache vollständig

Out[386]= $4\,a^6 + 972\,a^2\,(x^2 + y^2)^2 + 27\,a^4\,(-4\,x^2 + 5\,y^2) == 2916\,(x^2 + y^2)^3$

Nephroide

In[390]:=
```
4 a^6 + 3 a^4 (5 y^2 - 4 x^2) + 12 a^2 (x^2 + y^2)^2 == 4 (x^2 + y^2)^3 /. a → 1 (* vermutete Nephroide*)
```

Out[390]= $4 + 12\,(x^2 + y^2)^2 + 3\,(-4\,x^2 + 5\,y^2) == 4\,(x^2 + y^2)^3$

In[393]:=
```
4 a^6 + 972 a^2 (x^2 + y^2)^2 + 27 a^4 (-4 x^2 + 5 y^2) == 2916 (x^2 + y^2)^3 /. a → 3
 (* berechnete Hüllkurve *) // FullSimplify
```
vereinfache vollständig

Out[393]= $729\,\left(4 + 12\,(x^2 + y^2)^2 - 4\,(x^2 + y^2)^3 + 3\,(-4\,x^2 + 5\,y^2)\right) == 0$

Beide Kurven stimmen überein,

also ist die Nephroide als Kaustik der Kardioide

erschienen.

$$4 + 12\,(x^2 + y^2)^2 - 4\,(x^2 + y^2)^3 + 3\,(-4\,x^2 + 5\,y^2) == 0$$