Kurven sehen und verstehen

Haftendorn März. 2017, http://www.kurven-sehen-und-verstehen.de

---

Aufg 9.11 Analysis an der Nephroide

```
Quit
```
beende Kernel

Parameterdarstellung

$$x[t\_] := \frac{a}{2}\left(3\,\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Cos}[3\,t]\right)$$
Kosinus Kosinus

$$y[t\_] := \frac{a}{2}\left(3\,\mathrm{Sin}[t] + \mathrm{Sin}[3\,t]\right)$$
Sinus Sinus

Grundkreis

$$\mathrm{kreis} = x^2 + y^2 == a^2$$

$$x^2 + y^2 == a^2$$

$$\left\{x\left[\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right], y\left[\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right], x[\mathrm{Pi}], y[\mathrm{Pi}]\right\} \text{ (*Probe *)}$$
Kreisz… Kreiszahl π

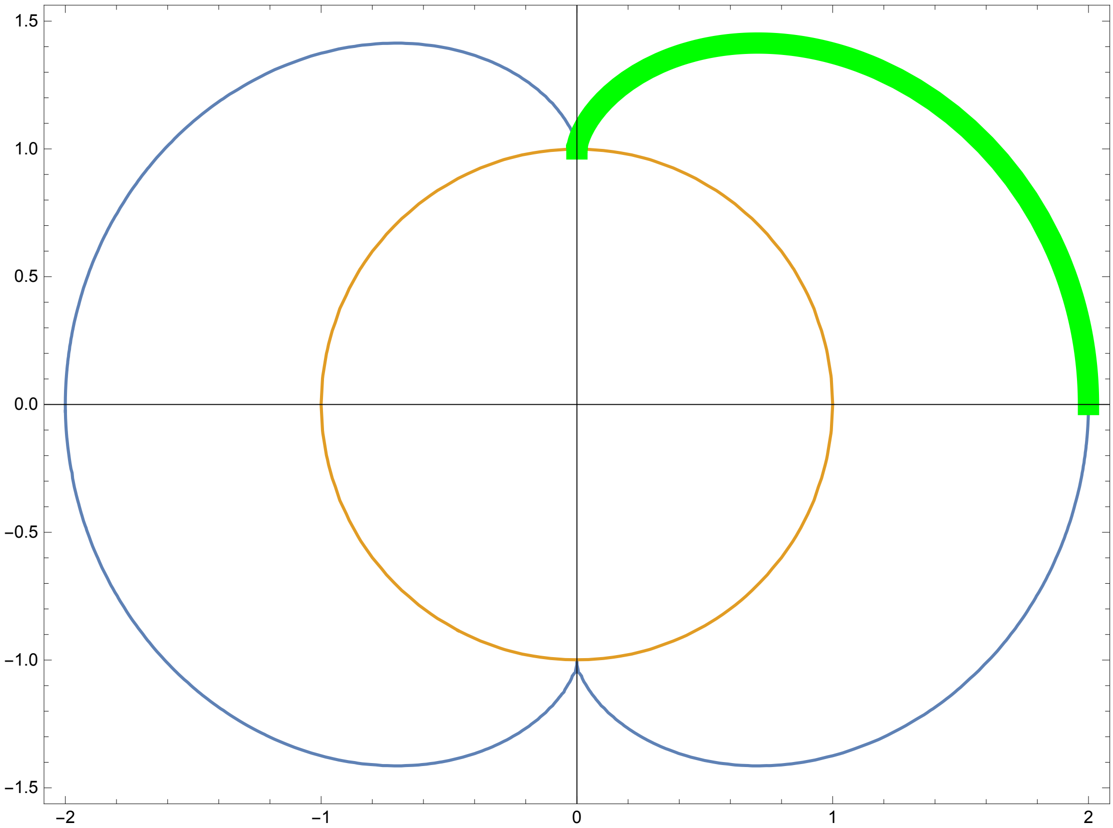
$$\{0, a, -2\,a, 0\}$$

Nephroide, implizte Gleichung

```
nephroide = 4 a^6 + 3 a^4 (5 x^2 - 4 y^2) + 12 a^2 (x^2 + y^2) ^2 == 4 (x^2 + y^2) ^3
```

$$4\,a^6 + 3\,a^4\left(5\,x^2 - 4\,y^2\right) + 12\,a^2\left(x^2 + y^2\right)^2 == 4\left(x^2 + y^2\right)^3$$

```
a = 1;
nephroideBild = ContourPlot[{nephroide // Evaluate, kreis // Evaluate},
                 Konturgraphik            werte aus            werte aus
  {x, -2, 2}, {y, -1.5, 1.5}, AspectRatio → Automatic];
                              Seitenverhältnis automatisch
nephroBild = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, Pi/2},
             parametrische Darstellung
  PlotStyle → {Thickness[0.02], Green}];
               Dicke            grün
Show[nephroideBild, nephroBild, Axes → True]
                                Axen   wahr
a =.
```



Flächen $\int_{t1}^{t2} yy[t]\ xx'[t]\ dt$ oder $\int_{t1}^{t2} yy'[t]\ xx[t]\ dt$

```
nephA = 4 Integrate[x[t] D[y[t], t], {t, 0, Pi/2}] (*4 mal Viertel der Fläche*)
          integriere    leite ab
```

$3 a^2 \pi$

Kreis $F=\pi a^2$

```
nephA - Pi a^2
        Kreisz
```

$2 a^2 \pi$

Jedes Möndchen ist so groß wie der Grundkreis.

Bogenlänge s = $\int_{t1}^{t2}\sqrt{xx'[t]^2 + yy'[t]^2}\,dt$

```
D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2
```

$\frac{1}{4} a^2 (3 \mathrm{Cos}[t] + 3 \mathrm{Cos}[3 t])^2 + \frac{1}{4} a^2 (-3 \mathrm{Sin}[t] - 3 \mathrm{Sin}[3 t])^2$

```
radi = D[x[t], t]^2 + D[y[t], t]^2 // FullSimplify
```
vereinfache vollst…

$9 a^2 \mathrm{Cos}[t]^2$

```
s = 4 Integrate[3 a Cos[t], {t, 0, Pi/2}] (* 4 mal Viertelbogen*)
```
integriere Kosinus

12 a

Drei Grundkreisdurchmesser passen auf jeder Seite.

Krümmungsradius

In afg9 .8-nephroide-evolute.nb

ist P als Mitte zwischen Q und dem einen Schnittpunkt der Normale mit dem Grundkreis bestimmt worden. Als Punkt der Evolute ist P gleichzeitig auch Krümmungskreismittelpunkt für die Krümmung der Nephroide im Punkt Q.

```
xm1 = 1/2 (x[t] - a Cos[t] Cos[2 t] + a Sin[t] Sin[2 t]) // FullSimplify
```
Kosinus Kosinus Sinus Sinus vereinfache vollst…

$-\frac{1}{4} a (-3 \mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Cos}[3 t])$

```
ym1 = 1/2 (y[t] - Cos[2 t] (a + 2 a Cos[t]^2 Sec[2 t]) Sin[t]) // FullSimplify // PowerExpand
```
Kosinus Sekante Sinus vereinfache vollstä⋯ multipliziere Pot…

$a \mathrm{Sin}[t]^3$

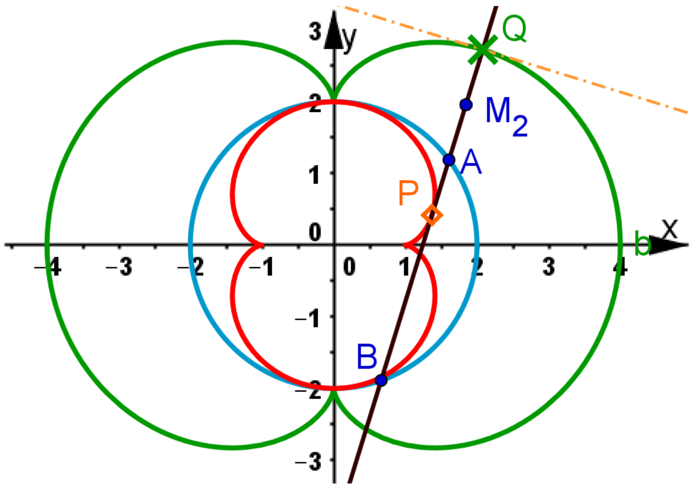
Abstand QP

```
q = Abs[Sqrt[(xm1 - x[t])^2 + (ym1 - y[t])^2]] // FullSimplify // PowerExpand // TraditionalForm
```
Absolutwert vereinfache vollstä⋯ multipliziere Pote⋯ traditionelle Form

$\frac{3}{2} |a|\, |\cos(t)|$

Das ist das erwartete Ergebnis, wenn die Nephroide waagerecht liegt und die

Evolute senkrecht. Der Abstand $\frac{3}{2}\ |a|\ \ |\cos(t)|$ fällt von $\frac{3}{2}\ |a|$ bei t=0 auf 0 bei $t = \frac{\text{Pi}}{2}$.



In der Aufgabe steht , der Abstand sei $\frac{3}{2}\ |a|\ \ |\sin(t)|$. Dabei ist offenbar die aufrechte Form für

die Nephroide gemeint, wieder mit dem Winkel $\hat{t}$, es ist $\hat{t} = t + \frac{\pi}{2}$.

Dann beginnt der Abstand mit 0 und wächst (hier im dritten Quadranten) auf $\frac{3}{2}\ |a|$.

Besondere Beobachtung

Der andere Mittelpunkt

```
xm2 = 1/2 (x[t] + a Cos[t] Cos[2 t] + a Sin[t] Sin[2 t]) // FullSimplify // PowerExpand
```
Kosinus Kosinus Sinus Sinus vereinfache vollstä··· multipliziere Pot

$\frac{1}{4}$ a (5 Cos[t] + Cos[3 t])

```
ym2 = 1/2 (y[t] - Cos[2 t] (a - 2 a Cos[t]^2 Sec[2 t]) Sin[t]) // FullSimplify // PowerExpand
```
Kosinus Sekante Sinus vereinfache vollstä··· multipliziere Pot

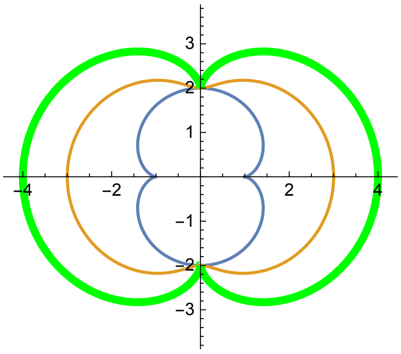
$\frac{1}{4}$ a (5 Sin[t] + Sin[3 t])

```
pq2 = Sqrt[(xm2 - x[t])^2 + (ym2 - y[t])^2] // FullSimplify // PowerExpand
```
vereinfache vollstä··· multipliziere Pot

$\frac{1}{2}$ a Cos[t]

In der Datei (jetzt hier unten) ist auch die andere Mittenkurve, die von M2 gezeichnet, im unteren

Bild ockerfarben.



Längs der Normalen in Q auf der grünen Kurve gemessen ist der Abstand zwischen den beiden Mittenkurven in blau und gelb für jedes t stets **a cos(t).**
Oben ist als q2 die Strecke PM2 berechnet..