Kurven sehen und verstehen

Haftendorn März. 2017, http://www.kurven-sehen-und-verstehen.de

---

Afg9.4 Pedalkurven der Astroide

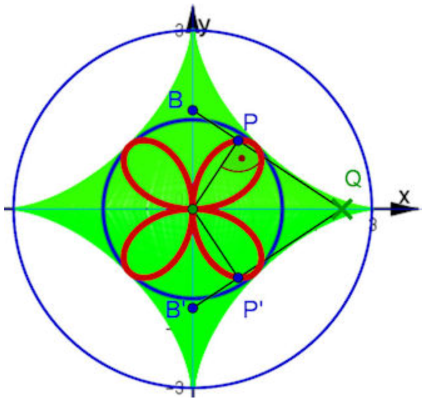


Abb. 8.22 Rosette als Fußpunktkurve der Astroide
Im Abschnitt 4.4.5.2 und Abb. 4.37b) ist die Astroide als Hüllkurve einer Stange fester Länge zu sehen, deren Enden auf den Achsen wandern. Im genannten Bild wird eine Ellipse erzeugt, links aber wird vom Ursprung aus ein Lot auf die Stange gefällt. Der Fußpunkt dieses Lotes sei P, an der x-Achse gespiegelt liegt P'. Die **Ortskurve von P ist das Quadrifolium,** die übliche Vierblatt-Rosette aus Abb. 8.17, wie im Folgenden bewiesen wird.
Hier ist die **Astroide** der Rand der grünen Fläche. Ihre Gleichung wird nicht benötigt, denn mit der Stange *hat* man ja schon die benötigten Tangenten.

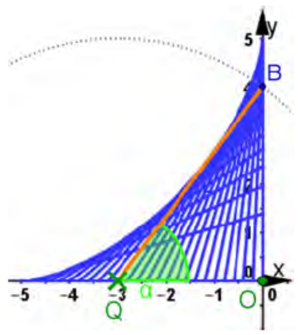


Abb. 9.7 Astroide und rutschende Leiter Die Geraden haben die Gleichung $y = f(x,\alpha) = \tan(\alpha)\,x + a\,\sin(\alpha)$, wobei a die Länge der orangefarbenen Leiter ist.
Die partielle Ableitung dieser Gleichung nach α ist:
$0 = \frac{x}{\cos(\alpha)^2} + a\cos(\alpha)$.
Daraus folgt $\boldsymbol{x = -a\cos(\alpha)^3}$ und damit in der oberen Gleichung $y = -a\cos(\alpha)^3 \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + a\sin(\alpha) = a\sin(\alpha)\cdot\left(-\cos(\alpha)^2+1\right)$, also $\boldsymbol{y = a\sin(\alpha)^3}$. Soll der Parameter α, wie im Bild, die Bedeutung als Tangentenwinkel haben, muss man das Minuszeichen bei x beibehalten. Mit dem Parameter $\varphi = \pi - \alpha$ tritt kein Minuszeichen auf.

Im Buch kommt die Astroide mehrfach vor. In Abb. 8.22 Seite 242 sieht man schon eine Fußpunktkurve, nämlich die mit dem Pol im Ursprung. Hier ist nun die Aufgabenstellung, die **Stellung des Pols zu variieren**.
In Abb.~9.7 auf Seite 271 sind die Tangenten mit ihrer Steigung als Parameter schon angegeben.

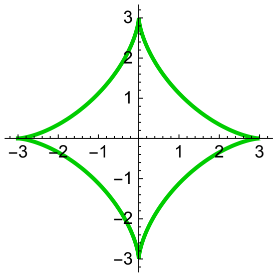
```
Quit
```
beende Kernel

```
In[153]:= xa[α_] := -a Cos[α]^3
          ya[α_] := a Sin[α]^3

In[156]:= a = 3;
```

```
In[157]:= astroBild = ParametricPlot[{xa[α], ya[α]}, {α, 0, 2 Pi},
                      parametrische Darstellung                Kreisza
             Axes -> True, AspectRatio → Automatic,
             Axen    wahr   Seitenverhältnis  automatisch
             PlotStyle → {Thickness[0.015], RGBColor[0, 0.8, 0]}]
             Darstellungsstil  Dicke          RGB Farbe
```

Out[157]=



```
In[145]:= a =.
```

Eliminieren von α ging nicht einfach so, aber man sieht es mit bloßem Auge

```
Eliminate[{x == a c^3, y == a s^3, c^2 + s^2 == 1}, {c, s}] //
eliminiere
 FullSimplify(* richtig, aber unbrauchbar*)
 vereinfache vollständig
```

Implizite kartesische Gleichung ist also

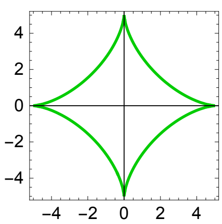
```
astroide = x^(2/3) + y^(2/3) == a^(2/3);
```

Andere Darstellungen

```
CubeRoot[x^2] + CubeRoot[y^2] == CubeRoot[a^2]
Kubikwurzel     Kubikwurzel      Kubikwurzel
```

$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} == 5^{2/3}$

```
astroBildImpl =
 ContourPlot[CubeRoot[x^2] + CubeRoot[y^2] == CubeRoot[a^2], {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
 Konturgraphik Kubikwurzel    Kubikwurzel      Kubikwurzel
  Axes -> True, AspectRatio → Automatic,
  Axen    wahr   Seitenverhältnis  automatisch
  ContourStyle → {Thickness[0.015], RGBColor[0, 0.8, 0]}]
                  Dicke             RGB Farbe
```



Tangente

```
tan1[x_] := Tan[α] (x - xa[α]) + ya[α]
            Tangente
```

Lot von A=(c,d) auf die Tangente

```
lot[x_] := -Cot[α] (x - c) + d
             Kotangens
```

Schnittpunkt

```
a =.

tan1[x] == lot[x]
```

a Sin[α]^3 + (x + a Cos[α]^3) Tan[α] == d − (−c + x) Cot[α]

```
SS = Solve[a Sin[α]^3 + (x + a Cos[α]^3) Tan[α] == d - (-c + x) Cot[α], {x}] // FullSimplify
     löse                               Tangente              Kotangens           vereinfache vollst
```

{{x → Cos[α] (c Cos[α] + Sin[α] (d − a Sin[α]))}}

```
Sy = lot[x] /. SS[[1, 1]] // Simplify
                              vereinfache
```

$\frac{1}{2}$ Sin[α] (a + 2 c Cos[α] + a Cos[2 α] + 2 d Sin[α])

```
Sx = SS[[1, 1, 2]]
```

Cos[α] (c Cos[α] + Sin[α] (d − a Sin[α]))

Pedalkurven zur Astroide mit Manipulate

```
a = 3;
```

```
In[175]:= Manipulate[Show[astroBild,
          manipuliere  zeige an
    ParametricPlot[{Cos[α] (c Cos[α] + Sin[α] (d - a Sin[α])),
    parametrische Darste· Kosinus  Kosinus  Sinus  Sinus
       1/2 Sin[α] (a + 2 c Cos[α] + a Cos[2 α] + 2 d Sin[α])},
           Sinus          Kosinus      Kosinus      Sinus
     {α, 0, 2 Pi}, PlotStyle → {Thickness[0.01], Red} ],
               Kre···  Darstellungsstil  Dicke          rot
    Plot[((x + a Cos[α]^3) Tan[α] + a Sin[α]^3), {x, -3, 6}, PlotRange → {-5, 5},
    stelle Funktio··· Kosinus  Tangente  Sinus            Koordinatenbereich der Graphik
     PlotStyle → Black,  AspectRatio → Automatic] , (*tanBild,lotBild,*)
                 schwarz  Seitenverhältnis  automatisch
    Plot[ -Cot[α] (x - c) + d, {x, -3, 6}, PlotRange → {-5, 5}, AspectRatio → Automatic],
           Kotangens                       Koordinatenbereich der G··· Seitenverhältnis  automatisch
    Graphics[{PointSize[0.025], Blue, Point[{c, d}], PointSize[0.02],
              Punktgröße          blau  Punkt         Punktgröße
      Black, Point[{Cos[α] (c Cos[α] + Sin[α] (d - a Sin[α])),
             Punkt  Kosinus  Kosinus  Sinus       Sinus
         1/2 Sin[α] (a + 2 c Cos[α] + a Cos[2 α] + 2 d Sin[α])}]}]
             Sinus          Kosinus      Kosinus      Sinus

   ],
   Style["Astroide+Pedalkurve", 30],
   Stil
   Style["Fälle das Lot vom blauen Punkt A=(c,d) auf die Tangenten.\nGezeigt
   Stil
      ist die Ortskurve des Fußpunktes.", 14], (*{{a,3},2,3},*)
   {{c, 2}, 0, 6}, {{d, 1}, 0, 6}, {{α, 1}, 0.001, 2 Pi - 0.001},
                                                     Kreiszahl π
   FrameLabel → {{None, None}, {"www.kurven-erkunden-und-verstehen.de", None}},
                  keine  keine                                          keine
   LabelStyle → Directive[RGBColor[0.7, 0, 0], Medium],
                Anweisung  RGB Farbe             mittelgroß
   SaveDefinitions → True]
                     wahr
```

Astroide+Pedalkurve

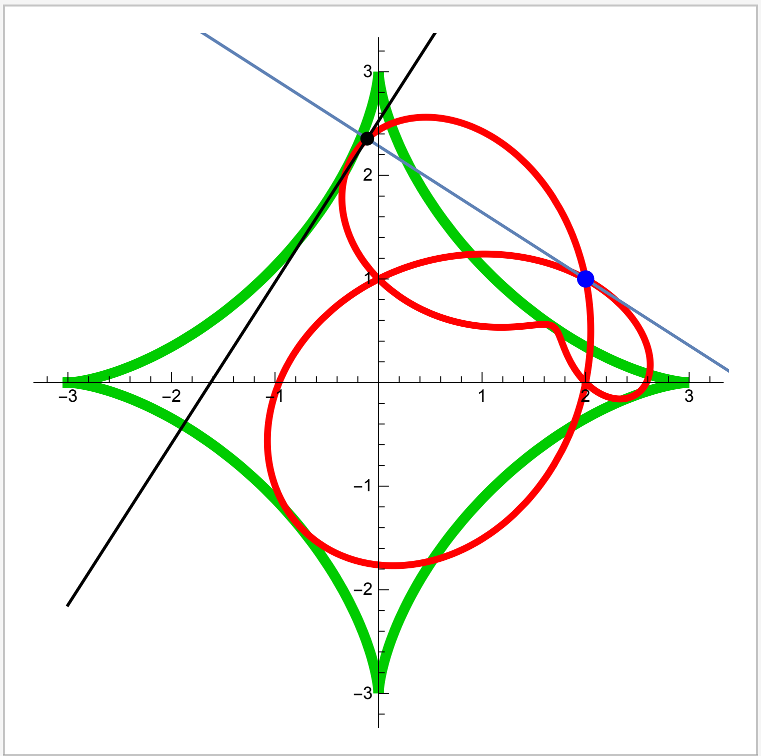
Fälle das Lot vom blauen Punkt A=(c,d) auf die Tangenten.
Gezeigt ist die Ortskurve des Fußpunktes.

c

d

α

Out[175]=



www.kurven−erkunden−und−verstehen.de

Herleitung der impliziten Formel für die Pedalkurve gelingt,

ist aber nicht praktisch.

```
Eliminate[{x == Cos[α] (c Cos[α] + Sin[α] (d - a Sin[α])),
  y == 1/2 Sin[α] (a + 2 c Cos[α] + a Cos[2 α] + 2 d Sin[α])}, {α}] // FullSimplify
```

eliminiere, Kosinus, Kosinus, Sinus, Sinus, Sinus, Kosinus, Kosinus, Sinus, vereinfache vollständig

... Eliminate: Inverse functions are being used by Eliminate, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

```
$Aborted
```

In[172]:=
```
Eliminate[{x == co (c co + si (d - a si)),
    y == 1/2 si (a + 2 c co + a co^2 - a si^2 + 2 d si), co^2 + si^2 == 1}, {co, si}] // FullSimplify
```
eliminiere; vereinfache vollständig

Out[172]=
$$x^6 + x^4 \left(6 c^2 + (d - 3 y)(d - y)\right) + (d - y)^4 y^2 + c^2 (d - y)^2 \left(-9 + y^2\right) + 2 c x (d - y)\left(9 d + \left(-9 + c^2 + d^2\right) y - 3 d y^2 + 2 y^3\right) + x^2 \left(c^4 + c^2 (d - 7 y)(d - y) - (d - y)^2 \left(9 + 2 d y - 3 y^2\right)\right) == 2 c x^3 \left(2 c^2 + d^2 + 2 x^2 - 5 d y + 4 y^2\right)$$

In[173]:=
```
x^6 + x^4 (6 c^2 + (d - 3 y) (d - y)) + (d - y)^4 y^2 +
   c^2 (d - y)^2 (-9 + y^2) + 2 c x (d - y) (9 d + (-9 + c^2 + d^2) y - 3 d y^2 + 2 y^3) +
   x^2 (c^4 + c^2 (d - 7 y) (d - y) - (d - y)^2 (9 + 2 d y - 3 y^2)) -
   2 c x^3 (2 c^2 + d^2 + 2 x^2 - 5 d y + 4 y^2) // FullSimplify
```
vereinfache vollständig

Out[173]=
$$x^6 + x^4 \left(6 c^2 + (d - 3 y)(d - y)\right) + (d - y)^4 y^2 + c^2 (d - y)^2 \left(-9 + y^2\right) - 2 c x^3 \left(2 c^2 + d^2 + 2 x^2 - 5 d y + 4 y^2\right) + 2 c x (d - y)\left(9 d + \left(-9 + c^2 + d^2\right) y - 3 d y^2 + 2 y^3\right) + x^2 \left(c^4 + c^2 (d - 7 y)(d - y) - (d - y)^2 \left(9 + 2 d y - 3 y^2\right)\right)$$

In[170]:=
```
c = 2;
d = 1;
ContourPlot[x^6 + x^4 (6 c^2 + (d - 3 y) (d - y)) + (d - y)^4 y^2 + c^2 (d - y)^2 (-9 + y^2) -
    2 c x^3 (2 c^2 + d^2 + 2 x^2 - 5 d y + 4 y^2) + 2 c x (d - y) (9 d + (-9 + c^2 + d^2) y - 3 d y^2 + 2 y^3) +
    x^2 (c^4 + c^2 (d - 7 y) (d - y) - (d - y)^2 (9 + 2 d y - 3 y^2)) == 0, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
c =.;
d =.;
```
Konturgraphik

Out[170]=