■ Kurven sehen und verstehen

Haftendorn März. 2017, http://www.kurven-sehen-und-verstehen.de

Afg9.4 Pedalkurven der Steinerkurve

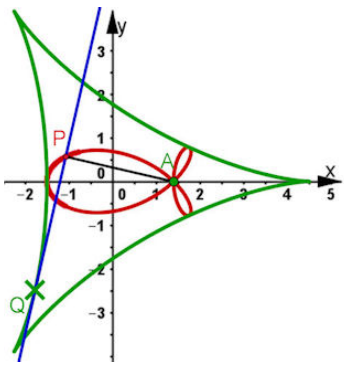


Abb. 9.3 **Steiner-Kurve oder Deltoid** mit einer ihrer Fußpunktkurven. Parameterdarstellung der Steiner-Kurve

$$\begin{aligned} x(t) &= \varrho\,(2\cos(t) + cos(2t)) \\ y(t) &= \varrho\,(2\sin(t) - sin(2t)) \end{aligned} \tag{9.6}$$

Die kartesische Gleichung der Steiner-Kurve ist:
$(x-3\varrho)^3(x+\varrho) + y^2(2x^2+y^2+24x\varrho+18\varrho^2) = 0$
Jakob Steiner (1796-1863) war Schweizer Mathematiker, der später in Berlin arbeitete und Bedeutendes in der Geometrie geleistet hat.

```
Quit
```
beende Kernel

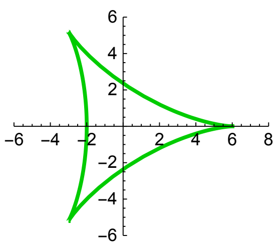
ρ = a = Radius des Rollkreises und Umkreisradius = 3 ρ =3 a

In[117]:=
```
xst[t_] := a (2 Cos[t] + Cos[2 t])
yst[t_] := a (2 Sin[t] - Sin[2 t])
```
Kosinus, Kosinus; Sinus, Sinus

In[75]:=
```
a = 2;
```

In[76]:=
```
steinerBild = ParametricPlot[{xst[t], yst[t]}, {t, 0, 2 Pi},
  Axes -> True, AspectRatio → Automatic,
  PlotStyle → {Thickness[0.015], RGBColor[0, 0.8, 0]}, PlotRange → {{-6, 8}, {-6, 6}}]
a =.
```
parametrische Darstellung, Kreiszahl π; Axen, wahr, Seitenverhältnis, automatisch; Darstellungsstil, Dicke, RGB Farbe, Koordinatenbereich der Graphik

Out[76]=



Eliminieren von t

In[1]:=
```
TrigExpand[Cos[2 t]]
TrigExpand[Sin[2 t]]
```
erweitere tri··· Kosinus
erweitere tri··· Sinus

Out[1]= Cos[t]^2 - Sin[t]^2

Out[2]= 2 Cos[t] Sin[t]

In[5]:=
```
(*c=Cos[t]; s=Sin[t]*)
Eliminate[{x == a (2 c + c^2 - s^2), y == a (2 s - 2 s c), c^2 + s^2 == 1}, {c, s}] //
 FullSimplify
```
Kosinus Sinus
eliminiere
vereinfache vollständig

Out[5]= $(3a - x)^3 (a + x) == 2 (9 a^2 + 12 a x + x^2) y^2 + y^4$

In[7]:=
```
Subtract @@ ((3 a - x)^3 (a + x) == 2 (9 a^2 + 12 a x + x^2) y^2 + y^4) // Expand
```
subtrahiere multipliziere aus

Out[7]= $27 a^4 - 18 a^2 x^2 + 8 a x^3 - x^4 - 18 a^2 y^2 - 24 a x y^2 - 2 x^2 y^2 - y^4$

Vergleich mit der Gleichung im Buch gelingt

In[9]:=
```
(x - 3 a)^3 (x + a) + y^2 (2 x^2 + y^2 + 24 a x + 18 a^2) // Expand
```
multipliziere aus

Out[9]= $-27 a^4 + 18 a^2 x^2 - 8 a x^3 + x^4 + 18 a^2 y^2 + 24 a x y^2 + 2 x^2 y^2 + y^4$

Eliminieren von t ging nicht ohne obige Substitution,

Zum Vergleich nochmal mit Reduce:

```
Reduce[{x == xst[t], y == yst[t] }, t]
```
reduziere

Implizite kartesische Gleichung ist also

```
steiner = (9 a^2 + 12 a x + x^2 + y^2)^2 == 4 a (3 a + 2 x)^3;
```

Vergleich mit den obigen Gleichungen gelingt

In[8]:=
```
Subtract @@ ((9 a^2 + 12 a x + x^2 + y^2)^2 == 4 a (3 a + 2 x)^3) // Expand
```
subtrahiere multipliziere aus

Out[8]= $-27 a^4 + 18 a^2 x^2 - 8 a x^3 + x^4 + 18 a^2 y^2 + 24 a x y^2 + 2 x^2 y^2 + y^4$

Andere Darstellungen

```
steinerBildImpl =
 ContourPlot[(9 a^2 + 12 a x + x^2 + y^2)^2 == 4 a (3 a + 2 x)^3, {x, -3, 6}, {y, -5, 5},
 Konturgraphik
  Axes -> True, AspectRatio → Automatic,
  Axen     wahr  Seitenverhältnis  automatisch
  ContourStyle → {Thickness[0.015], RGBColor[0, 0.8, 0]}]
  Konturenstil     Dicke               RGB Farbe
```

Nullstellen der Steinerkurve

In[52]:= $\left(\left(9 a^2+12 a x+x^2+y^2\right)^2==4 a\,(3 a+2 x)^3\right)$ /. y → 0

Out[52]= $\left(9 a^2+12 a x+x^2\right)^2==4 a\,(3 a+2 x)^3$

In[53]:= Solve$\left[\left(9 a^2+12 a x+x^2\right)^2==4 a\,(3 a+2 x)^3, \{x\}\right]$
löse

Out[53]= {{x → -a}, {x → 3 a}, {x → 3 a}, {x → 3 a}}

Pedalkurven aus der der Parameterdarstellung, Pol A=(b,0)

```
In[119]:= D[xst[t], t] /. t → q
          leite ab
          D[yst[t], t] /. t → q
          leite ab
```

Out[119]= a (-2 Sin[q] - 2 Sin[2 q])

Out[120]= a (2 Cos[q] - 2 Cos[2 q])

Tangente in Q=(xst[q],yst[q])

In[123]:= $\text{tan}[x\_] := \dfrac{(2\,\text{Cos}[q]-2\,\text{Cos}[2 q])\,(x-\text{xst}[q])}{-2\,\text{Sin}[q]-2\,\text{Sin}[2 q]}+\text{yst}[q]$ // Simplify
vereinfache

tan[x]

Out[124]= $(a - x + 2 a\,\text{Cos}[q])\,\text{Tan}\left[\frac{q}{2}\right]$

A und das Lot

In[125]:= $\text{lot}[x\_] := \dfrac{(\text{Sin}[q]+\text{Sin}[2 q])}{(\text{Cos}[q]-\text{Cos}[2 q])}\,(x-b)$

Schnittpunkt

In[126]:=
```
tan[x] == lot[x]
```

Out[126]=
$$\left(a - x + 2\,a\,\mathrm{Cos}[q]\right)\,\mathrm{Tan}\left[\frac{q}{2}\right] == \frac{(-b + x)\,\left(\mathrm{Sin}[q] + \mathrm{Sin}[2\,q]\right)}{\mathrm{Cos}[q] - \mathrm{Cos}[2\,q]}$$

In[127]:=
```
SS = Solve[tan[x] == lot[x], {x}] // Simplify
```
löse　vereinfache

Out[127]=
$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(b + (a + b)\,\mathrm{Cos}[q] - a\,\mathrm{Cos}[2\,q]\right)\right\}\right\}$$

In[130]:=
```
Sy = tan[x] /. SS[[1, 1]] // Simplify
```
vereinfache

Out[130]=
$$\frac{1}{2}\left(a - b + 2\,a\,\mathrm{Cos}[q]\right)\,\mathrm{Sin}[q]$$

In[131]:=
```
Sx = SS[[1, 1, 2]]
```

Out[131]=
$$\frac{1}{2}\left(b + (a + b)\,\mathrm{Cos}[q] - a\,\mathrm{Cos}[2\,q]\right)$$

```
{Sx, Sy} /. a → 2  (* Für die Zeichnung reciht ein festes a*)
```

Out[132]=
$$\left\{\frac{1}{2}\left(b + (2 + b)\,\mathrm{Cos}[q] - 2\,\mathrm{Cos}[2\,q]\right),\ \frac{1}{2}\left(2 - b + 4\,\mathrm{Cos}[q]\right)\,\mathrm{Sin}[q]\right\}$$

In[133]:=
```
tan[x] /. a → 2
```

Out[133]=
$$\left(2 - x + 4\,\mathrm{Cos}[q]\right)\,\mathrm{Tan}\left[\frac{q}{2}\right]$$

In[134]:=
```
lot[x] /. a → 2
```

Out[134]=
$$\frac{(-b + x)\,\left(\mathrm{Sin}[q] + \mathrm{Sin}[2\,q]\right)}{\mathrm{Cos}[q] - \mathrm{Cos}[2\,q]}$$

Pedalkurven zur Steinerkurven mit Manipulate

In[78]:=

```
Manipulate[Show[steinerBild,
manipuliere  zeige an
   ParametricPlot[{1/2 (b + (2 + b) Cos[t] - 2 Cos[2 t]), 1/2 (2 - b + 4 Cos[t]) Sin[t]} //
   parametrische Darstellung       Kosinus   Kosinus                   Kosinus  Sinus
     Evaluate, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle → Red ],
                       Kre···  Darstellungsstil  rot

   Plot[(2 - x + 4 Cos[q]) Tan[q/2], {x, -6, 8}, PlotRange → {-5, 5},
   stelle Funktion ···  Kosinus  Tangente         Koordinatenbereich der Graphik
    PlotStyle → Black,  AspectRatio → Automatic] , (*tanBild,lotBild,*)
                schwarz  Seitenverhältnis  automatisch

   Plot[(Sin[q] + Sin[2 q])/(Cos[q] - Cos[2 q]) (x - b),
   stelle Funktion graphisch dar
    {x, -6, 8}, PlotRange → {-5, 5}, AspectRatio → Automatic],
               Koordinatenbereich der G···  Seitenverhältnis  automatisch
   Graphics[{PointSize[0.025], Blue, Point[{b, 0}], PointSize[0.02], Black,
   Graphik   Punktgröße           blau  Punkt         Punktgröße         schwarz
     Point[{1/2 (b + (2 + b) Cos[q] - 2 Cos[2 q]), 1/2 (2 - b + 4 Cos[q]) Sin[q]}]}]
     Punkt                Kosinus     Kosinus                 Kosinus  Sinus
  ],
  Style["Steinerkurve+Pedalkurve", 30],
  Stil
  Style["Fälle das Lot vom blauen Punkt A=(b,0) auf die
  Stil
     Tangenten.\nGezeigt ist die Ortskurve des Fußpunktes.", 14],
  {{b, 2}, -10, 10}, {{q, 1}, 0.001, 2 Pi - 0.001},
                                        Kreiszahl π
  FrameLabel → {{None, None}, {"www.kurven-erkunden-und-verstehen.de", None}},
  Rahmenbeschrift···  keine  keine                                    keine
  LabelStyle → Directive[RGBColor[0.7, 0, 0], Medium],
  Beschriftungsstil  Anweisung  RGB Farbe         mittelgroß
  SaveDefinitions → True]
  speichere Definitionen  wahr
```

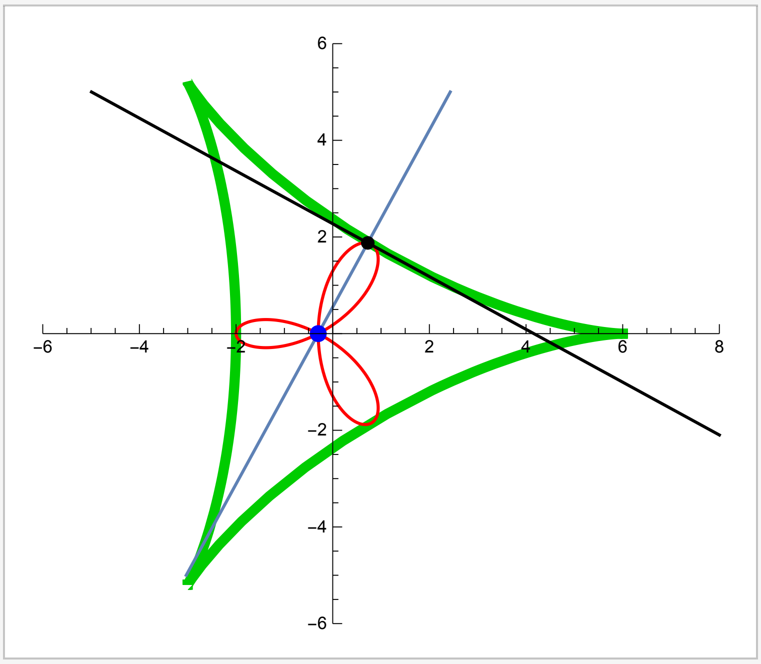
Steinerkurve+Pedalkurve

Fälle das Lot vom blauen Punkt A=(b,0) auf die Tangenten.
Gezeigt ist die Ortskurve des Fußpunktes.

b

q

Out[78]=



www.kurven−erkunden−und−verstehen.de

Implizite Gleichung der Pedalkurven

In[135]:=
```
{1/2 (b + (a + b) Cos[q] - a Cos[2 q]), 1/2 (a - b + 2 a Cos[q]) Sin[q]}
```
Kosinus Kosinus Kosinus Sinus

Out[135]= $\left\{\frac{1}{2}\left(b+(a+b)\,\mathrm{Cos}[q]-a\,\mathrm{Cos}[2\,q]\right),\ \frac{1}{2}\left(a-b+2\,a\,\mathrm{Cos}[q]\right)\mathrm{Sin}[q]\right\}$

Substitution

In[136]:=
```
stpedal = Eliminate[
  {x == 1/2 (b + (a + b) c - a c^2 + a s^2), y == 1/2 (a - b + 2 a c) s, c^2 + s^2 == 1}, {c, s}]
```
eliminiere

Out[136]= $(a-3\,b)\,x^3+x^4+x^2\left(-3\,a\,b+3\,b^2+2\,y^2\right)+x\left(3\,a\,b^2-b^3-3\,a\,y^2-3\,b\,y^2\right) == a\,b^3-3\,a\,b\,y^2-b^2\,y^2-y^4$

In[137]:=
```
stped = (Subtract @@ stpedal) // FullSimplify
```
subtrahiere vereinfache vollst&

Out[137]= $-(b-x)^3\,(a+x)+(3\,a+b-2\,x)\,(b-x)\,y^2+y^4$

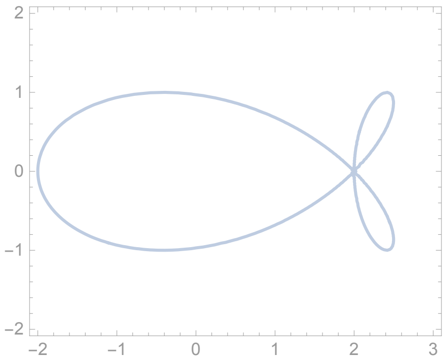
```
pedale =
  y^4 == (x - b) (y^2 (3 a + b - 2 x) - (x - b)^2 (a + x));
```

```
b = 2;
a = 2;
ContourPlot[y^4 == (x - b) (y^2 (6 + b - 2 x) - (x - b)^2 (2 + x)),
```
Konturgraphik

```
 {x, -2, 3}, {y, -2, 2}, AspectRatio → Automatic]
```
Seitenverhältnis automatisch

```
b =.;
a =.;
```

Out[47]=



Vergleich von dieser Gleichung mit dem Buch gelingt

In[109]:=
```
a =.
```

In[140]:=
```
y^4 - (x - b) (y^2 (3 a + b - 2 x) - (x - b)^2 (a + x)) // Expand   (* Gleichung von oben *)
```
multipliziere aus

Out[140]= $-a\,b^3 + 3\,a\,b^2\,x - b^3\,x - 3\,a\,b\,x^2 + 3\,b^2\,x^2 + a\,x^3 - 3\,b\,x^3 + x^4 + 3\,a\,b\,y^2 + b^2\,y^2 - 3\,a\,x\,y^2 - 3\,b\,x\,y^2 + 2\,x^2\,y^2 + y^4$

In[141]:=
```
((x - b)^2 + y^2)^2 + (x - b)^3 (a + b) - (3 a - b) (x - b) y^2 //
 Expand (* Gleichung aus dem Buch ,passt *)
```
multipliziere aus

Out[141]= $-a\,b^3 + 3\,a\,b^2\,x - b^3\,x - 3\,a\,b\,x^2 + 3\,b^2\,x^2 + a\,x^3 - 3\,b\,x^3 + x^4 + 3\,a\,b\,y^2 + b^2\,y^2 - 3\,a\,x\,y^2 - 3\,b\,x\,y^2 + 2\,x^2\,y^2 + y^4$