Kurven sehen und verstehen

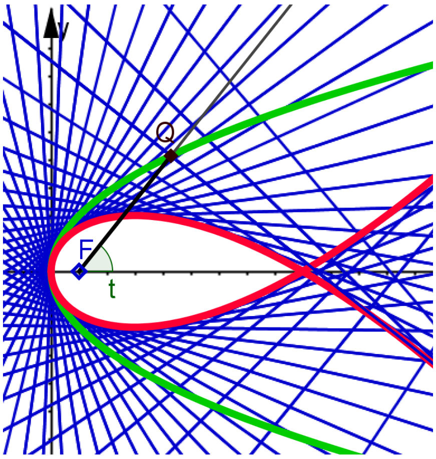
Haftendorn März. 2017, http://www.kurven-sehen-und-verstehen.de

---

Afg9.5 Contra-Pedalkurven der Parabel.

negative Fußpunktkurven

Definition 9.2 (Negative Fußpunktkurve)
Zu jeder Kurve C und jedem festen Punkt A, Pol genannt, lasst sich eine negative Fußpunktkurve C_N erzeugen. In einem beliebigen Punkt Q der Kurve C wird auf der Strecke AQ im Q die Senkrechte errichtet. Die Hüllkurve aller dieser Senkrechten ist die negative Fußpunktkurve von C mit dem Pol A. Die englische Bezeichnung der negativen Fußpunktkurven ist negative pedal curves oder contra pedals.




```
Quit
```
beende Kernel

```
parabel = y^2 == 2 p x
```
$y^2 == 2\,p\,x$

```
A = {c, d}; Q = {u, v}; v^2 == 2 p u  (* später A=F={p/2,0}*)
```
$v^2 == 2\,p\,u$

In[49]:= `c =.; d =.; p =.;`

Senkrechte auf AQ in Q

In[50]:= $\texttt{tant} = y == -\frac{c-u}{d-v}(x-u)+v$

Out[50]= $y == v - \frac{\left(c - \frac{v^2}{2p}\right)\left(-\frac{v^2}{2p} + x\right)}{d - v}$

Ersetzen von u durch die Weg-Gleichung

In[51]:= $u == \frac{v^2}{2\,p}$; (* Weg von Q*)

In[52]:= tant

Out[52]= $y == v - \frac{\left(c - \frac{v^2}{2\,p}\right)\left(-\frac{v^2}{2\,p} + x\right)}{d - v}$

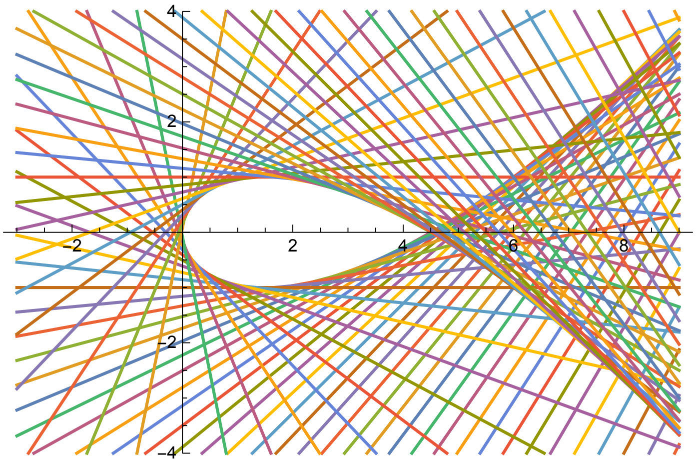
In[53]:= p = 1; c = 0.5; d = 0; $v - \frac{\left(c - \frac{v^2}{2\,p}\right)\left(-\frac{v^2}{2\,p} + x\right)}{d - v}$

alle = Table$\left[v - \frac{\left(c - \frac{v^2}{2\,p}\right)\left(-\frac{v^2}{2\,p} + x\right)}{d - v}\right.$, {v, -6, 6, 0.1}$\left.\right]$;
Tabelle

Out[53]= $v + \frac{\left(0.5 - \frac{v^2}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{2} + x\right)}{v}$

Power: Infinite expression $\frac{1}{0.}$ encountered.

In[55]:= Plot[alle, {x, -3, 9}, PlotRange → {-4, 4}, AspectRatio → Automatic]
stelle Funktion graphisch dar | Koordinatenbereich der Gr··· | Seitenverhältnis | automatisch

Out[55]=


Geradenschar mit Parameter v, Hüllkurve gesucht

Extremum-Methode für d=0

In[59]:= p =.; c =.; d = 0;

In[61]:= $v + \frac{\left(c - \frac{v^2}{2\,p}\right)\left(-\frac{v^2}{2\,p} + x\right)}{v - d}$ // Expand
multipliziere aus

Out[61]= $v - \frac{c\,v}{2\,p} + \frac{v^3}{4\,p^2} + \frac{c\,x}{v} - \frac{v\,x}{2\,p}$

In[62]:= $D\left[v - \frac{c\,v}{2\,p} + \frac{v^3}{4\,p^2} + \frac{c\,x}{v} - \frac{v\,x}{2\,p}, v\right]$
leite ab

Out[62]= $1 - \frac{c}{2\,p} + \frac{3\,v^2}{4\,p^2} - \frac{x}{2\,p} - \frac{c\,x}{v^2}$

$\text{Solve}\left[1 - \frac{c}{2\,p} + \frac{3\,z}{4\,p^2} - \frac{x}{2\,p} - \frac{c\,x}{z} == 0, z\right]$ (* z=v^2 *)
löse

$$\left\{\left\{z \to \frac{1}{6}\left(2\,c\,p - 4\,p^2 + 2\,p\,x - \sqrt{48\,c\,p^2\,x + \left(-2\,c\,p + 4\,p^2 - 2\,p\,x\right)^2}\right)\right\},\right.$$
$$\left.\left\{z \to \frac{1}{6}\left(2\,c\,p - 4\,p^2 + 2\,p\,x + \sqrt{48\,c\,p^2\,x + \left(-2\,c\,p + 4\,p^2 - 2\,p\,x\right)^2}\right)\right\}\right\}$$

Ausnutzung im Spezialfall A=Brennpunkt $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$

$\frac{1}{6}\left(2\,c\,p - 4\,p^2 + 2\,p\,x + \sqrt{48\,c\,p^2\,x + \left(-2\,c\,p + 4\,p^2 - 2\,p\,x\right)^2}\right)$ /. $c \to \frac{p}{2}$

$$\frac{1}{6}\left(-3\,p^2 + 2\,p\,x + \sqrt{24\,p^3\,x + \left(3\,p^2 - 2\,p\,x\right)^2}\right)$$

$\frac{1}{6}\left(2\,c\,p - 4\,p^2 + 2\,p\,x - \sqrt{48\,c\,p^2\,x + \left(-2\,c\,p + 4\,p^2 - 2\,p\,x\right)^2}\right)$ /. $c \to \frac{p}{2}$ // FullSimplify
vereinfache vollständig

$$\frac{1}{6}\left(-3\,p^2 + 2\,p\,x - \sqrt{p^2\left(3\,p + 2\,x\right)^2}\right)$$

$\frac{1}{6}\left(-3\,p^2 + 2\,p\,x + \sqrt{p^2\left(3\,p + 2\,x\right)^2}\right)$

$\frac{1}{6}\left(-3\,p^2 + 2\,p\,x + p\left(3\,p + 2\,x\right)\right)$ // Simplify (* Wurzel im Kopf gezogen *)
vereinfache

$$\frac{2\,p\,x}{3}$$

$\frac{1}{6}\left(-3\,p^2 + 2\,p\,x - p\left(3\,p + 2\,x\right)\right)$ // Simplify
vereinfache

$$-p^2$$

Dies trägt nicht zur Lösung bei, $v^2 = -p^2$ geht nicht, p=0 ist keine Parabel

Einsetzen in die Gleichung der Schar $v = \sqrt{\frac{2\,p\,x}{3}}$

$$\frac{v^2}{2\,p} \to \frac{x}{3}$$

$$y == v + \frac{\left(c - \frac{v^2}{2p}\right)\left(-\frac{v^2}{2p} + x\right)}{v} \text{ /. } c \to \frac{p}{2} \quad \text{(* Nur für dieses c gilt v *)}$$

$$y == v + \frac{\left(\frac{p}{2} - \frac{v^2}{2p}\right)\left(-\frac{v^2}{2p} + x\right)}{v}$$

$$y == \frac{\frac{2px}{3} + \left(\frac{p}{2} - \frac{x}{3}\right)\left(-\frac{x}{3} + x\right)}{\sqrt{\frac{2px}{3}}} \text{ // FullSimplify}$$

vereinfache vollständig

$$y == \frac{(9p - 2x)\,x}{3\sqrt{6}\,\sqrt{p\,x}} \quad \text{(* Quadrieren *)}$$

$$\text{Tschirnhaus} = 54\,p\,y^2 == (9p - 2x)^2\,x;$$

Das ist die Formel, die im Buch steht.

Bestimmung der Pedalkurven der Tschirnhauskubik

```
Quit
```

beende Kernel

$$54\,p\,v^2 == (9p - 2u)^2\,u; \quad \text{(*Tschirnhaus-Kubik*)}$$

Q={u,v} sei nun ein Punkt auf der Tschirnhaus-Kubik und A={c,d} ein Pol. Wir beschaffen die Tangente in Q und fällen von A aus das Lot auf diese Tangente. Gesucht ist die Ortskurve des Schnittpunktes von Tangente und Lot.

$$\text{D}\left[(9p - 2x)^2\,x,\ x\right] \quad \text{(* rechte Seite *)}$$

leite ab

$$(9p - 2x)^2 - 4\,(9p - 2x)\,x$$

```
% // Simplify
```

vereinfache

$$81\,p^2 - 72\,p\,x + 12\,x^2$$

$$108\,p\,y\,y' == 81\,p^2 - 72\,p\,x + 12\,x^2 \quad \text{(* implizite Ableitung der Kubik*) // Simplify}$$

vereinfache

$$27\,p^2 + 4\,x^2 == 24\,p\,x + 36\,p\,y\,y'$$

Tangente in Q

$$\text{tang} = y == \frac{27\,p^2 + 4\,u^2 - 24\,p\,u}{36\,p\,v}\,(x - u) + v;$$

Lot von A auf die Tangente

$$y == \frac{-36\,p\,v}{27\,p^2+4\,u^2-24\,p\,u}\,(x-c)\,+d$$

$$y == d - \frac{36\,p\,v\,(-c+x)}{27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2}$$

Sei im Folgenden zunächst der Fall d=0 betrachtet

```
d = 0;
```

$$\text{lot} = y == -\frac{36\,p\,v\,(-c+x)}{27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2}$$

$$y == -\frac{36\,p\,v\,(-c+x)}{27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2}$$

Konkreter Fall $p = 1$, $c = \frac{1}{2}$, u=6

A=F und Q speziell

$$54\,y^2 == (9-2\,x)^2\,x;$$

```
% /. x → 6
```

$$54\,y^2 == 54$$

Also Q={6,- 1 } oder Q={6, 1 }, als Konketrisierungen obiger Formeln

$$\left(\frac{27\,p^2+4\,u^2-24\,p\,u}{36\,p\,v}\,(x-u)\;+v\;/.\;v\to -1\right)\;/.\;u\to 6\;//\;\text{Simplify}$$
vereinfache

$$\frac{7}{2}-\frac{3\,x}{4}\quad \text{(* Tangententerm, passt*)}$$

$$\left(-\frac{36\,p\,v\,(-c+x)}{27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2}\;/.\;v\to -1\right)\;/.\;u\to 6\;//\;\text{Simplify}$$
vereinfache

$$\frac{2}{3}\,(-1+2\,x)\quad \text{(* Lotterm, passt*)}$$

$$\text{Solve}\left[y == 7/2-3\,x/4\;\&\&\;y == \frac{-2}{3}+\frac{4}{3}\,x,\;\{x,\,y\}\right]$$
löse

```
{{x → 2, y → 2}}   (*passt*)
```

Also klappt der konkrete Fall, siehe GeoGebra-Bild beim Allgemeinen Fall (unten)

Allgemeinerer Fall für $A = F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$

In[63]:= $p =.;\ c = \frac{p}{2};\ d = 0$

Out[63]= 0

Tangente in Q

In[64]:= $\text{tang} = y == \frac{27\,p^2 + 4\,u^2 - 24\,p\,u}{36\,p\,v}\,(x - u) + v;$

Lot von F auf die Tangente

In[65]:= $y == \frac{-36\,p\,v}{27\,p^2 + 4\,u^2 - 24\,p\,u}\left(x - \frac{p}{2}\right)$

Out[65]= $y == -\frac{36\,p\,v\left(-\frac{p}{2} + x\right)}{27\,p^2 - 12\,v^2 + \frac{v^4}{p^2}}$

Q auf Kubik

$54\,p\,v^2 == (9\,p - 2\,u)^2\,u;$ (*Tschirnhaus-Kubik*)

In[15]:= $\text{Solve}\left[54\,p\,v^2 == (9\,p - 2\,u)^2\,u,\ \{v\}\right]$
löse

Out[15]= $\left\{\left\{v \to -\frac{(9\,p - 2\,u)\,\sqrt{u}}{3\,\sqrt{6}\,\sqrt{p}}\right\},\ \left\{v \to \frac{(9\,p - 2\,u)\,\sqrt{u}}{3\,\sqrt{6}\,\sqrt{p}}\right\}\right\}$

Solve[
löse

$$\left\{y == \frac{27\,p^2 + 4\,u^2 - 24\,p\,u}{36\,p\,\frac{(9\,p-2\,u)\,\sqrt{u}}{3\,\sqrt{6}\,\sqrt{p}}}\,(x - u) + \frac{(9\,p - 2\,u)\,\sqrt{u}}{3\,\sqrt{6}\,\sqrt{p}},\ y == -\frac{36\,p\,\frac{(9\,p-2\,u)\,\sqrt{u}}{3\,\sqrt{6}\,\sqrt{p}}\left(-\frac{p}{2} + x\right)}{27\,p^2 - 24\,p\,u + 4\,u^2}\right\},\ \{x, y\}]$$

$$\left\{\left\{x \to \frac{u}{3},\ y \to \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{p}\,\sqrt{u}\right\}\right\}$$

$\text{Eliminate}\left[\left\{x == \frac{u}{3},\ y == \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{p}\,\sqrt{u}\right\},\ u\right]$
eliminiere

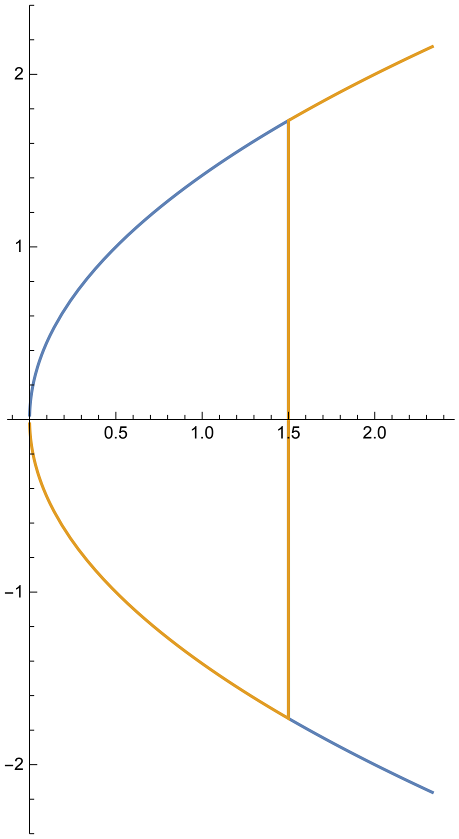
$y^2 == 2\,p\,x$

Das ist die erwartete Parabel.

konkrete Fälle passen

In[40]:=
```
p = 1;
c = 1/2; ParametricPlot[
            parametrische Darstellung
 {{xs[u], ys[u]} // Evaluate, {xs[u], -ys[u]} // Evaluate}, {u, 0.001, 7 }]
                   werte aus                     werte aus
p =.;
c =.;
```

Out[40]=



Allgmeinerer Fall mit A=(c,0)

In[21]:=
```
Quit
beende Kernel
```

Tangente in Q

In[1]:= tang = y == $\frac{27\,p^2 + 4\,u^2 - 24\,p\,u}{36\,p\,v}$ (x − u) + v;

Lot von A auf die Tangente

In[4]:= $y == \frac{-36\, p\, v}{27\, p^2 + 4\, u^2 - 24\, p\, u} (x - c) + d$

Out[4]= $y == d - \frac{36\, p\, v\, (-c + x)}{27\, p^2 - 24\, p\, u + 4\, u^2}$

nochmal d=0, ist ein Sonderfall

In[5]:= `d = 0;`

In[26]:= $lot = y == -\frac{36\, p\, v\, (-c + x)}{27\, p^2 - 24\, p\, u + 4\, u^2}$

Out[26]= $y == -\frac{36\, p\, v\, (-c + x)}{27\, p^2 - 24\, p\, u + 4\, u^2}$

In[27]:= `Solve[{lot, tang}, {x, y}]`
löse

Out[27]= $\{\{x \to -((-729\, p^4\, u + 1296\, p^3\, u^2 - 792\, p^2\, u^3 + 192\, p\, u^4 - 16\, u^5 - 1296\, c\, p^2\, v^2 + 972\, p^3\, v^2 - 864\, p^2\, u\, v^2 + 144\, p\, u^2\, v^2) / (729\, p^4 - 1296\, p^3\, u + 792\, p^2\, u^2 - 192\, p\, u^3 + 16\, u^4 + 1296\, p^2\, v^2)),$
$y \to (36\, p\, v\, (27\, c\, p^2 - 24\, c\, p\, u - 27\, p^2\, u + 4\, c\, u^2 + 24\, p\, u^2 - 4\, u^3 + 36\, p\, v^2)) / (729\, p^4 - 1296\, p^3\, u + 792\, p^2\, u^2 - 192\, p\, u^3 + 16\, u^4 + 1296\, p^2\, v^2)\}\}$

In dem Ausdruck für x kommt v nur quadratisch vor. Q auf der Kubik heißt:

In[29]:= `54 p v^2 == (9 p - 2 u) ^2 u;`

In[9]:= $v^2 == \frac{u\, (9\, p - 2\, u)\, \hat{}2}{54\, p};$

In[10]:= $-\left(\left(-729\, p^4\, u + 1296\, p^3\, u^2 - 792\, p^2\, u^3 + 192\, p\, u^4 - 16\, u^5 - 1296\, c\, p^2 \frac{u\, (9\, p - 2\, u)\, \hat{}2}{54\, p} + 972\, p^3 \frac{u\, (9\, p - 2\, u)\, \hat{}2}{54\, p} - 864\, p^2\, u \frac{u\, (9\, p - 2\, u)\, \hat{}2}{54\, p} + 144\, p\, u^2 \frac{u\, (9\, p - 2\, u)\, \hat{}2}{54\, p}\right) \middle/ \left(729\, p^4 - 1296\, p^3\, u + 792\, p^2\, u^2 - 192\, p\, u^3 + 16\, u^4 + 1296\, p^2 \frac{u\, (9\, p - 2\, u)\, \hat{}2}{54\, p}\right)\right)$ `// FullSimplify`
vereinfache vollständig

Out[10]= $\frac{u\, (9\, (8\, c - 3\, p)\, p + 12\, p\, u + 4\, u^2)}{3\, (3\, p + 2\, u)^2}$

In[73]:= $xs[u\_] := \frac{u\, (9\, (8\, c - 3\, p)\, p + 12\, p\, u + 4\, u^2)}{3\, (3\, p + 2\, u)^2}$

In[30]:=
```
ys[u_] := (36 p Sqrt[u (9 p - 2 u)^2 / (54 p)]
   (27 c p^2 - 24 c p u - 27 p^2 u + 4 c u^2 + 24 p u^2 - 4 u^3 + 36 p u (9 p - 2 u)^2 / (54 p))) /
  (729 p^4 - 1296 p^3 u + 792 p^2 u^2 - 192 p u^3 + 16 u^4 + 1296 p^2 u (9 p - 2 u)^2 / (54 p))
```

$$ys[u\_] := \left(36\, p \sqrt{\frac{u\,(9\,p-2\,u)\,\hat{}\,2}{54\,p}}\left(27\,c\,p^2-24\,c\,p\,u-27\,p^2\,u+4\,c\,u^2+24\,p\,u^2-4\,u^3+36\,p\,\frac{u\,(9\,p-2\,u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)\right)\Big/\left(729\,p^4-1296\,p^3\,u+792\,p^2\,u^2-192\,p\,u^3+16\,u^4+1296\,p^2\,\frac{u\,(9\,p-2\,u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)$$

In[33]:=

ys[u] // FullSimplify

vereinfache vollst

In[74]:=

$$\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}\,(9\,p-2\,u)\,u\,\left(9\,c\,p-6\,c\,u+9\,p\,u+2\,u^2\right)}{\sqrt{\frac{(9\,p-2\,u)^2\,u}{p}}\,(3\,p+2\,u)^2}$$

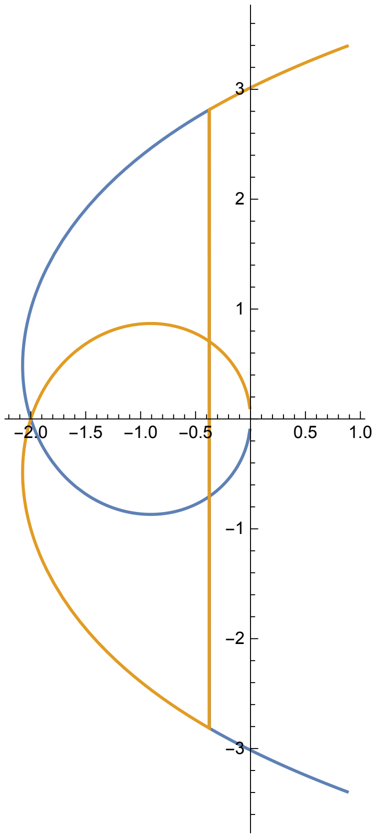
$$ys[u\_] := \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}\,(9\,p-2\,u)\,u\,\left(9\,c\,p-6\,c\,u+9\,p\,u+2\,u^2\right)}{\sqrt{\frac{(9\,p-2\,u)^2\,u}{p}}\,(3\,p+2\,u)^2}$$

Out[74]=

$$\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}\,(9\,p-2\,u)\,u\,\left(\frac{9\,p^2}{2}+6\,p\,u+2\,u^2\right)}{\sqrt{\frac{(9\,p-2\,u)^2\,u}{p}}\,(3\,p+2\,u)^2}$$

In[38]:=
```
p = 1;
c = -2; ParametricPlot[
        parametrische Darstellung
 {{xs[u], ys[u]} // Evaluate, {xs[u], -ys[u]} // Evaluate}, {u, 0.001, 7 }]
                   werte aus                      werte aus
p =.;
c =.;
```

Out[38]=



Weiter allgemeines A=(c,d)

In[29]:= $54\,p\,v^2 == (9\,p - 2\,u)\,^\wedge 2\ u;$

In[9]:= $v^2 == \dfrac{u\,(9\,p - 2\,u)\,^\wedge 2}{54\,p};$

Tangente in Q

In[92]:= $\text{tang} = y == \dfrac{27\,p^2 + 4\,u^2 - 24\,p\,u}{36\,p\,v}\,(x - u) + v;$

Lot von A auf die Tangente

In[132]:= `d =.; c =.; lot = y ==` $\frac{-36\,p\,v}{27\,p^2+4\,u^2-24\,p\,u}$ `(x - c) + d`

Out[132]= $y == d - \frac{36\,p\,v\,(-c+x)}{27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2}$

In[133]:= `Solve[{lot, tang}, {x, y}]`

löse

Out[133]= $\left\{\left\{x \to -\frac{-d-\frac{u\,(27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2)}{36\,p\,v}+v-\frac{36\,c\,p\,v}{27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2}}{\frac{27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2}{36\,p\,v}+\frac{36\,p\,v}{27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2}},\right.\right.$

$y \to -\left(\left(-729\,d\,p^4+1296\,d\,p^3\,u-792\,d\,p^2\,u^2+192\,d\,p\,u^3-16\,d\,u^4-972\,c\,p^3\,v+\right.\right.$
$864\,c\,p^2\,u\,v+972\,p^3\,u\,v-144\,c\,p\,u^2\,v-864\,p^2\,u^2\,v+144\,p\,u^3\,v-1296\,p^2\,v^3\Big)\Big/$
$\left.\left.\left.\left(729\,p^4-1296\,p^3\,u+792\,p^2\,u^2-192\,p\,u^3+16\,u^4+1296\,p^2\,v^2\right)\right)\right\}\right\}$

In[134]:= $xs = -\frac{-d-\frac{u\,(27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2)}{36\,p\,v}+v-\frac{36\,c\,p\,v}{27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2}}{\frac{27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2}{36\,p\,v}+\frac{36\,p\,v}{27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2}}$ `// FullSimplify`

vereinfache vollst

Out[134]= $\left((3\,p-2\,u)^2\,(9\,p-2\,u)^2\,u+36\,d\,p\,(3\,p-2\,u)\,(9\,p-2\,u)\,v+36\,p\,\left(9\,(4\,c-3\,p)\,p+24\,p\,u-4\,u^2\right)\,v^2\right)\Big/$
$\left(\left(27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2\right)^2+1296\,p^2\,v^2\right)$

Ersetzten von v^2 und v per Hand, da es sonst nicht richtig funktionierte.

$$\left((3\,p-2\,u)^2\,(9\,p-2\,u)^2\,u+36\,d\,p\,(3\,p-2\,u)\,(9\,p-2\,u)^2\sqrt{\frac{u}{54\,p}}+36\,p\,\left(9\,(4\,c-3\,p)\,p+24\,p\,u-4\,u^2\right)\frac{u\,(9\,p-2\,u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)\Big/\left(\left(27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2\right)^2+1296\,p^2\,\frac{u\,(9\,p-2\,u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)$$

In[250]:= $xs = \left(\left((3\,p-2\,u)^2\,(9\,p-2\,u)^2\,u+36\,d\,p\,(3\,p-2\,u)\,(9\,p-2\,u)^2\sqrt{\frac{u}{54\,p}}+36\,p\,\left(9\,(4\,c-3\,p)\,p+24\,p\,u-4\,u^2\right)\frac{u\,(9\,p-2\,u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)\Big/\left(\left(27\,p^2-24\,p\,u+4\,u^2\right)^2+1296\,p^2\,\frac{u\,(9\,p-2\,u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)\right.$ `// FullSimplify` $\Big)$

vereinfache vollständig

Out[250]= $\frac{72\,c\,p\,u-(3\,p-2\,u)\left(9\,p\,u+2\,u^2-6\,\sqrt{6}\,d\,p\,\sqrt{\frac{u}{p}}\right)}{3\,(3\,p+2\,u)^2}$

In[252]:= $xs2 = \left(\left(\left((3p-2u)^2\ (9p-2u)^2\ u - 36\,d\,p\ (3p-2u)\ (9p-2u)^2 \sqrt{\frac{u}{54\,p}} + 36\,p\ (9\ (4c-3p)\ p + 24\,p\,u - 4u^2)\ \frac{u\ (9p-2u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)\middle/\left((27p^2 - 24\,p\,u + 4u^2)^2 + 1296\,p^2\ \frac{u\ (9p-2u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)\ //\ \mathrm{FullSimplify}\right)$

vereinfache vollständig

Out[252]= $$\frac{72\,c\,p\,u - (3p-2u)\left(9\,p\,u + 2u^2 + 6\sqrt{6}\ d\,p\sqrt{\frac{u}{p}}\right)}{3\ (3p+2u)^2}$$

In[110]:= $-\left(\mathrm{Collect}\left[-729\,d\,p^4 + 1296\,d\,p^3\,u - 792\,d\,p^2\,u^2 + 192\,d\,p\,u^3 - 16\,d\,u^4 - 972\,c\,p^3\,v + 864\,c\,p^2\,u\,v + 972\,p^3\,u\,v - 144\,c\,p\,u^2\,v - 864\,p^2\,u^2\,v + 144\,p\,u^3\,v - 1296\,p^2\,v^3,\ v\right]\middle/\left(729\,p^4 - 1296\,p^3\,u + 792\,p^2\,u^2 - 192\,p\,u^3 + 16\,u^4 + 1296\,p^2\,v^2\right)\right)$

gruppiere Koeffizienten

Out[110]= $-\left(\left(-729\,d\,p^4 + 1296\,d\,p^3\,u - 792\,d\,p^2\,u^2 + 192\,d\,p\,u^3 - 16\,d\,u^4 + \left(-972\,c\,p^3 + 864\,c\,p^2\,u + 972\,p^3\,u - 144\,c\,p\,u^2 - 864\,p^2\,u^2 + 144\,p\,u^3\right)\,v - 1296\,p^2\,v^3\right)\middle/\left(729\,p^4 - 1296\,p^3\,u + 792\,p^2\,u^2 - 192\,p\,u^3 + 16\,u^4 + 1296\,p^2\,v^2\right)\right)$

In[111]:= %

In[253]:= $ys = \left(-\left(\left(-729\,d\,p^4 + 1296\,d\,p^3\,u - 792\,d\,p^2\,u^2 + 192\,d\,p\,u^3 - 16\,d\,u^4 + \left(\left(-972\,c\,p^3 + 864\,c\,p^2\,u + 972\,p^3\,u - 144\,c\,p\,u^2 - 864\,p^2\,u^2 + 144\,p\,u^3\right) - 1296\,p^2\ \frac{u\ (9p-2u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)\sqrt{\frac{u}{54\,p}}\ (9p-2u)\right)\middle/\left(729\,p^4 - 1296\,p^3\,u + 792\,p^2\,u^2 - 192\,p\,u^3 + 16\,u^4 + 1296\,p^2\ \frac{u\ (9p-2u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)\right)\ //\ \mathrm{FullSimplify}\right)$

vereinfache vollständig

Out[253]= $$\frac{3\,d\ (3p-2u)^2 + 2\sqrt{6}\ p\sqrt{\frac{u}{p}}\ \left(9\,c\,p - 6\,c\,u + 9\,p\,u + 2u^2\right)}{3\ (3p+2u)^2}$$

In[254]:= ys2 =

$$\left(-\left(\left(-729\,d\,p^4+1296\,d\,p^3\,u-792\,d\,p^2\,u^2+192\,d\,p\,u^3-16\,d\,u^4-\left(\left(-972\,c\,p^3+864\,c\,p^2\,u+972\,p^3\,u-144\,c\,p\,u^2-864\,p^2\,u^2+144\,p\,u^3\right)-1296\,p^2\,\frac{u\,(9\,p-2\,u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)\sqrt{\frac{u}{54\,p}}\,(9\,p-2\,u)\right)\Big/\left(729\,p^4-1296\,p^3\,u+792\,p^2\,u^2-192\,p\,u^3+16\,u^4+1296\,p^2\,\frac{u\,(9\,p-2\,u)\,\hat{}\,2}{54\,p}\right)\right)\right)\;//\;\mathtt{FullSimplify}$$

vereinfache vollständig

$$\text{Out[254]=}\quad \frac{3\,d\,(3\,p-2\,u)^2-2\,\sqrt{6}\,p\,\sqrt{\frac{u}{p}}\,\left(9\,c\,p-6\,c\,u+9\,p\,u+2\,u^2\right)}{3\,(3\,p+2\,u)^2}$$

Konkretisierungen

Manipulate, Vorbereitung und Ausführung

```
In[205]:= c =.; d =.; p
```

Out[205]= 1

```
In[259]:= xs /. p → 1
xs2 /. p → 1
ys /. p → 1
ys2 /. p → 1
```

$$\text{Out[259]=}\quad \frac{72\,c\,u-(3-2\,u)\left(-6\,\sqrt{6}\,d\,\sqrt{u}+9\,u+2\,u^2\right)}{3\,(3+2\,u)^2}$$

$$\text{Out[260]=}\quad \frac{72\,c\,u-(3-2\,u)\left(6\,\sqrt{6}\,d\,\sqrt{u}+9\,u+2\,u^2\right)}{3\,(3+2\,u)^2}$$

$$\text{Out[261]=}\quad \frac{3\,d\,(3-2\,u)^2+2\,\sqrt{6}\,\sqrt{u}\,\left(9\,c+9\,u-6\,c\,u+2\,u^2\right)}{3\,(3+2\,u)^2}$$

$$\text{Out[262]=}\quad \frac{3\,d\,(3-2\,u)^2-2\,\sqrt{6}\,\sqrt{u}\,\left(9\,c+9\,u-6\,c\,u+2\,u^2\right)}{3\,(3+2\,u)^2}$$

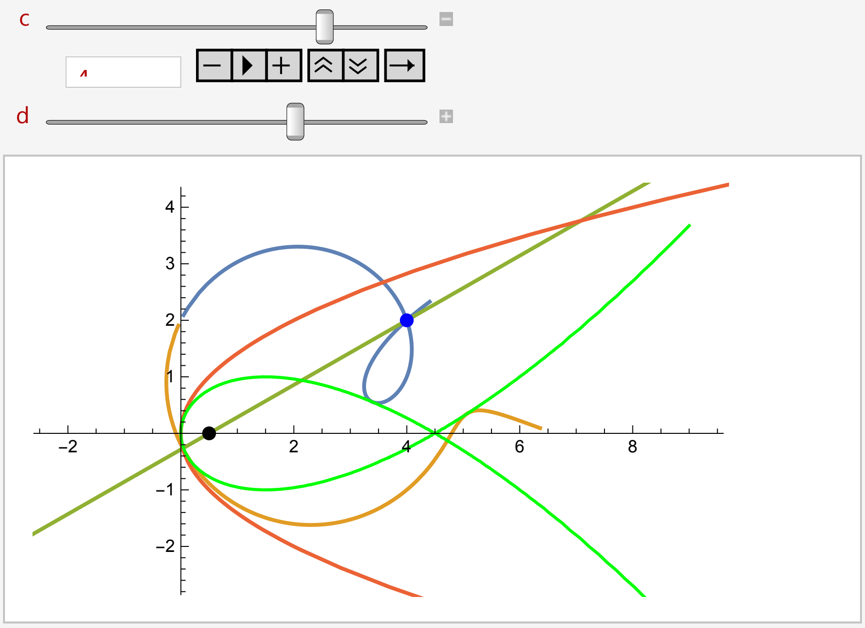
```
In[326]:= Manipulate[Show[ ParametricPlot[{{(72 c u - (3 - 2 u) (-6 √6 d √u + 9 u + 2 u^2))/(3 (3 + 2 u)^2),
          manipuliere  zeig···  parametrische Darstellung

      (3 d (3 - 2 u)^2 + 2 √6 √u (9 c + 9 u - 6 c u + 2 u^2))/(3 (3 + 2 u)^2)},
     {(72 c u - (3 - 2 u) (6 √6 d √u + 9 u + 2 u^2))/(3 (3 + 2 u)^2),
      (3 d (3 - 2 u)^2 - 2 √6 √u (9 c + 9 u - 6 c u + 2 u^2))/(3 (3 + 2 u)^2)}, {u, d/(c - 1/2) (u - 1/2)}, {u^2/2, u}},
    {u, -4, 12}, AspectRatio → Automatic, PlotStyle → Thick],
                 Seitenverhältnis  automatisch  Darstellungsstil dick
   ContourPlot[54 y^2 == (9 - 2 x)^2 x, {x, 0, 9}, {y, -4, 4}, ContourStyle → Green],
                                                                Konturenstil   grün
   Graphics[{PointSize[0.02], Blue, Point[{c, d}]}],
   Graphik   Punktgröße         blau  Punkt
   Graphics[{PointSize[0.02], Point[{1/2, 0}]}],
   Graphik   Punktgröße         Punkt
   PlotRange → {{-2, 9}, {-2.5, 4}}],
   Koordinatenbereich der Graphik

  Style["Tschirnhaus-Kubik+Pedalkurven", 30],
  Stil
  Style[
  Stil
   "Grün ist die T.-Kubik, die  bzg. F Contra-Pedale der roten Parabel ist.  \nDer
     Pol ist der blaue Punkt A=(c,d). Oliv ist die Gerade AF.", 14],
  {{c, -1}, -2, 6}, {{d, 2}, 0, 3},
  FrameLabel → {{None, None}, {"www.kurven-erkunden-und-verstehen.de", None}},
  Rahmenbeschrift···  keine  keine                                       keine
  LabelStyle → Directive[RGBColor[0.7, 0, 0], Medium],
  Beschriftungsstil  Anweisung  RGB Farbe         mittelgroß
  SaveDefinitions → True
  speichere Definitionen  wahr
 ]
```

Out[326]=

Tschirnhaus–Kubik+Pedalkurven

Grün ist die T.–Kubik, die bzg. F Contra–Pedale der roten Parabel ist.

Der Pol ist der blaue Punkt A=(c,d). Oliv ist die Gerade AF.



www.kurven–erkunden–und–verstehen.de

Rolle der Geraden durch A und F, dabei sei o.B.d.A. p=1

In allen Ansichten liegen die zwei Schnittpunkte dieser Geraden auch auf der Pedalen.

Geprüft im gezeichneten Fall c=-1 und d=2.

Überlegungen zu Loten x=c

```
Solve[27 p^2 + 4 u^2 - 24 p u == 0, {u}] (*waagerechte Tangente=senkrechtes Lot*)
```
löse

$\{\{u \to \frac{3p}{2}\}, \{u \to \frac{9p}{2}\}\}$ (*die Extremstelle und die Knotenstelle*)

2

In[11]:= $54\, p\, y^2 == (9 p - 2 x)^2 x$ /. x -> $\frac{3p}{2}$ // Simplify

vereinfache

Out[11]= $p^3 == p\, y^2$

Auf der Parabel gehört dazu die Ordinate des Brennpunktes.

Sonderfall x=c ist Lot und y=+/- p ist Tangente erzeugt einen Punkt der

Pedalkurve der Kubik