Kurven sehen und verstehen

Haftendorn April 2017, http://www.kurven-sehen-und-verstehen.de

Nephroide und ihre Evolute

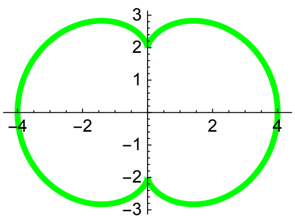
```
Quit
beende Kernel
```

Nephroide, doppelt achsensymmetrisch

```
x[t_] := a/2 (3 Cos[t] + Cos[3 t])
              Kosinus   Kosinus

y[t_] := a/2 (3 Sin[t] + Sin[3 t])
              Sinus     Sinus
```

```
a = 2;
nephroibild =
 ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle → {Thickness[0.02], Green}]
 parametrische Darstellung               Krei··· Darstellungsstil Dicke        grün
a =.
```



Elimination

```
TrigExpand[Cos[3 t]]
erweitere tri··· Kosinus
TrigExpand[Sin[3 t]]
erweitere tri··· Sinus
```

Cos[t]^3 – 3 Cos[t] Sin[t]^2

3 Cos[t]^2 Sin[t] – Sin[t]^3

```
Eliminate[{x == a/2 (3 c + c^3 - 3 c s^2), y == a/2 (3 s - s^3 + 3 c^2 s), s^2 + c^2 == 1}, {s, c}] //
eliminiere

 FullSimplify
 vereinfache vollständig
```

$$4 a^6 + 3 a^4 (5 x^2 - 4 y^2) + 12 a^2 (x^2 + y^2)^2 == 4 (x^2 + y^2)^3$$

implizite kartesische Gleichung der Nephroide, Spitzenabstand a

Schnitte mit den Achsen

$4 a^6 + 3 a^4 (5 x^2 - 4 y^2) + 12 a^2 (x^2 + y^2)^2 == 4 (x^2 + y^2)^3$ /. y → 0

$4 a^6 + 15 a^4 x^2 + 12 a^2 x^4 == 4 x^6$

Solve[$4 a^6 + 15 a^4 x^2 + 12 a^2 x^4 == 4 x^6$, {x}]
löse

$\{\{x \to -2 a\}, \{x \to 2 a\}, \{x \to -\frac{i a}{\sqrt{2}}\}, \{x \to -\frac{i a}{\sqrt{2}}\}, \{x \to \frac{i a}{\sqrt{2}}\}, \{x \to \frac{i a}{\sqrt{2}}\}\}$

$4 a^6 + 3 a^4 (5 x^2 - 4 y^2) + 12 a^2 (x^2 + y^2)^2 == 4 (x^2 + y^2)^3$ /. x → 0

$4 a^6 - 12 a^4 y^2 + 12 a^2 y^4 == 4 y^6$

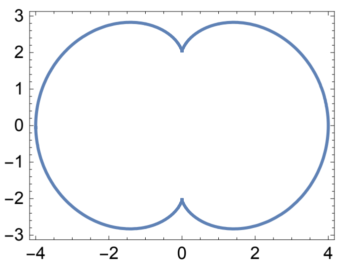
Solve[$4 a^6 - 12 a^4 y^2 + 12 a^2 y^4 == 4 y^6$, {y}]
löse

$\{\{y \to -a\}, \{y \to -a\}, \{y \to -a\}, \{y \to a\}, \{y \to a\}, \{y \to a\}\}$

Zeichnung

a = 2;
ContourPlot[$4 a^6 + 3 a^4 (5 x^2 - 4 y^2) + 12 a^2 (x^2 + y^2)^2 == 4 (x^2 + y^2)^3$,
Konturgraphik
{x, -4, 4}, {y, -3, 3}, AspectRatio → Automatic]
Seitenverhältnis automatisch

a =.



Rechnungen zu Tangenten

D[x[t], t]
leite ab
D[y[t], t]
leite ab

$\frac{1}{2} a (-3 \operatorname{Sin}[t] - 3 \operatorname{Sin}[3 t])$

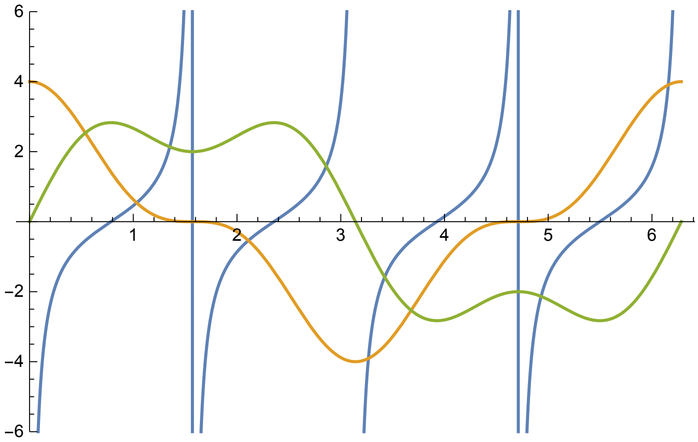
$\frac{1}{2} a (3 \operatorname{Cos}[t] + 3 \operatorname{Cos}[3 t])$

Steigung bei Parameterwert t.

```
m[t_] := - (Cos[t] + Cos[3 t]) / (Sin[t] + Sin[3 t])

a = 2; Plot[{m[t], x[t], y[t]}, {t, 0, 2 Pi}, PlotRange → {-6, 6}]
a =. (* y oliv *)
```

stelle Funktion graphisch dar · Kre··· · Koordinatenbereich der Grapl



Normalen

```
n[x_] := ((Sin[t] + Sin[3 t]) / (Cos[t] + Cos[3 t]) (x - x[t]) + y[t] // FullSimplify); n[x]
```

vereinfache vollständig

$(-a + 2\,x\,\mathrm{Cos}[t])\ \mathrm{Sec}[2\,t]\ \mathrm{Sin}[t]$

```
alle = Table[(-a + 2 x Cos[t]) Sec[2 t] Sin[t], {t, 0, 2 Pi, Pi/50}];
```

Tabelle · Kosinus · Sekante · Sinus · Kreiszahl π

```
a = 2;
all = Plot[alle, {x, -4.2, 4.2}, PlotRange → {-3, 3}, AspectRatio → Automatic];
a =.
```

stelle Funktion graphisch dar · Koordinatenbereich der Gr··· · Seitenverhältnis · automatisch

```
xk[t_] := a/2 (3 Cos[t] - Cos[3 t])
```

Kosinus · Kosinus

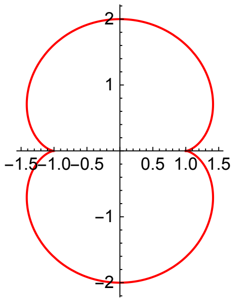
```
yk[t_] := a/2 (3 Sin[t] - Sin[3 t])
```

Sinus · Sinus

```
a = 1;
nephrobildk =
 ParametricPlot[{xk[t], yk[t]}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle → {Thickness[0.01], Red}]
```

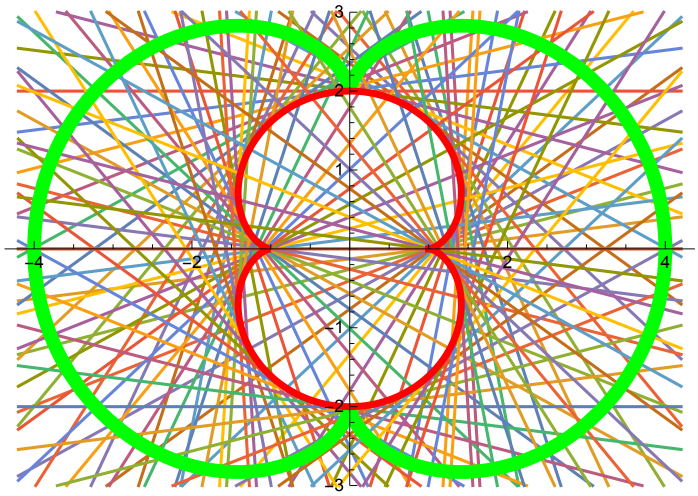
parametrische Darstellung | Krei··· | Darstellungsstil | Dicke | rot

```
a =.
```




```
Show[all, nephroibild, nephrobildk]
```

zeige an



Hinsehen und Eintragen: es ergibt sich eine auf 1/2 zentrisch gestauchte und um 90° gedrehte Nephroide in der gezeigten Lage.

Brechnung der Hüllkurve

$$n[x\_] := \left(\frac{\mathrm{Sin}[t] + \mathrm{Sin}[3\,t]}{\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Cos}[3\,t]}\,(x - x[t]) + y[t]\ //\ \mathrm{FullSimplify}\right);\ n[x]$$

vereinfache vollständig

$$(-a + 2\,x\,\mathrm{Cos}[t])\ \mathrm{Sec}[2\,t]\ \mathrm{Sin}[t]$$

$$\mathrm{norm} = y == \frac{\mathrm{Sin}[t] + \mathrm{Sin}[3\,t]}{\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Cos}[3\,t]}\,(x - x[t]) + y[t]\ //\ \mathrm{FullSimplify}$$

vereinfache vollstä

$$y + a\,\mathrm{Sec}[2\,t]\ \mathrm{Sin}[t] == x\,\mathrm{Tan}[2\,t]$$

```
abt = D[(Sin[t] + Sin[3 t])/(Cos[t] + Cos[3 t]) (x - x[t]) + y[t], t] // FullSimplify
```
leite ab — vereinfache vollstä

$\frac{1}{2}(4\,x - 3\,a\,\mathrm{Cos}[t] + a\,\mathrm{Cos}[3\,t])\,\mathrm{Sec}[2\,t]^2$

```
TrigExpand[(Cos[3 t])]
```
erweitere trigo··· Kosinus

$\mathrm{Cos}[t]^3 - 3\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]^2$

```
c^3 - 3 c (1 - c^2) // Simplify
```
vereinfache

$c\,(-3 + 4\,c^2)$

```
TrigExpand[(Sec[2 t])]
```
erweitere trigo··· Sekante

```
TrigExpand[(Tan[2 t])]
```
erweitere trigo··· Tangente

$\frac{1}{\mathrm{Cos}[t]^2 - \mathrm{Sin}[t]^2}$

$\frac{2\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]}{\mathrm{Cos}[t]^2 - \mathrm{Sin}[t]^2}$

Die abgeleitete Gleichung, die Normale n[x] und $c^2 + s^2 == 1$

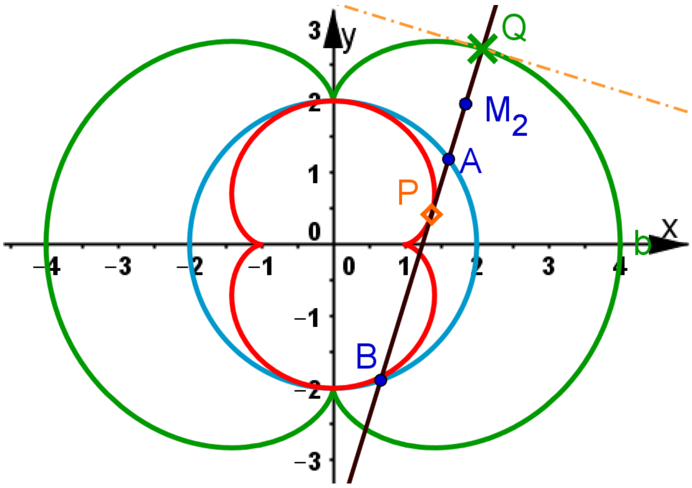
```
huell =
 Eliminate[{(4 x - 3 a c + a (4 c^3 - 3 c))/((c^2 - s^2)) == 0, y + a s/(c^2 - s^2) == x (2 c s)/(c^2 - s^2), c^2 + s^2 == 1 }, {c, s}] //
  FullSimplify
```
eliminiere — vereinfache vollständig

$a^6 + 48\,a^2\,(x^2 + y^2)^2 + 3\,a^4\,(-4\,x^2 + 5\,y^2) == 64\,(x^2 + y^2)^3$

```
a^6 + 48 a^2 (x^2 + y^2)^2 + 3 a^4 (-4 x^2 + 5 y^2) == 64 (x^2 + y^2)^3   (*Hüllkurve *)
gruen = 4 a^6 + 3 a^4 (5 x^2 - 4 y^2) + 12 a^2 (x^2 + y^2)^2 == 4 (x^2 + y^2)^3 /. a → a/2   (* Grüne Nephroide*)
a^6/16 + 3/16 a^4 (5 x^2 - 4 y^2) + 3 a^2 (x^2 + y^2)^2 == 4 (x^2 + y^2)^3   (* mal 16  von Hand *)
a^6 + 3 a^4 (5 x^2 - 4 y^2) + 48 a^2 (x^2 + y^2)^2 == 64 (x^2 + y^2)^3 // Expand  (* Tausch x--y im Kopf *)
```
multipliziere aus

passt, das ist tatsächlich die um Faktor 2 verkleinerte und gedrehte Nephroide

Evolute als Ort der Mitten



In Q auf der Nephroide wird die Normale konstruiert, die den blauen Kreis in A und B schneidet. B sei der entferntere Schrittpunkt. Die Mitte von BQ ist auch die Nephroide, die Evolute ist.

```
n[x]
```

$(-a + 2\,x\,\mathrm{Cos}[t])\,\mathrm{Sec}[2\,t]\,\mathrm{Sin}[t]$

```
kreis = x^2 + y^2 == a^2;
```

```
Solve[{y == n[x], x^2 + y^2 == a^2}, {x, y}] // FullSimplify // PowerExpand
löse                                          vereinfache vollstä…  multipliziere Potenzen aus
```

{{x → −a Cos[t] Cos[2 t] + a Sin[t] Sin[2 t], y → −Cos[2 t] (a + 2 a Cos[t]^2 Sec[2 t]) Sin[t]},
{x → a Cos[t] Cos[2 t] + a Sin[t] Sin[2 t], y → −Cos[2 t] (a − 2 a Cos[t]^2 Sec[2 t]) Sin[t]}}

Q hängt von t ab und auch die beiden Schnittpunkte. Ich brauche nun die Mitten

```
xm1 = 1/2 (x[t] - a Cos[t] Cos[2 t] + a Sin[t] Sin[2 t]) // FullSimplify
                 Kosinus  Kosinus      Sinus   Sinus        vereinfache vollst
```

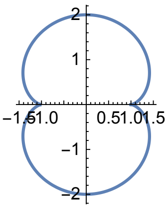
$-\frac{1}{4}\,a\,(-3\,\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Cos}[3\,t])$

```
ym1 = 1/2 (y[t] - Cos[2 t] (a + 2 a Cos[t]^2 Sec[2 t]) Sin[t]) // FullSimplify // PowerExpand
                  Kosinus                   Sekante      Sinus      vereinfache vollstä…  multipliziere Pot
```

$a\,\mathrm{Sin}[t]^3$

```
a = 2; ParametricPlot[{xm1, ym1}, {t, 0, 2 Pi}]
       parametrische Darstellung             Kreisz
```

a =.




```
xm2 = 1/2 (x[t] + a Cos[t] Cos[2 t] + a Sin[t] Sin[2 t]) // FullSimplify // PowerExpand
                    Kosinus Kosinus     Sinus   Sinus      vereinfache vollstä…  multipliziere Pote
```

$$\frac{1}{4} a \left(5 \text{Cos}[t] + \text{Cos}[3 t]\right)$$

```
ym2 = 1/2 (y[t] - Cos[2 t] (a - 2 a Cos[t]^2 Sec[2 t]) Sin[t]) // FullSimplify // PowerExpand
                  Kosinus                    Sekante   Sinus      vereinfache vollstä…  multipliziere Pote
```

$$\frac{1}{4} a \left(5 \text{Sin}[t] + \text{Sin}[3 t]\right)$$

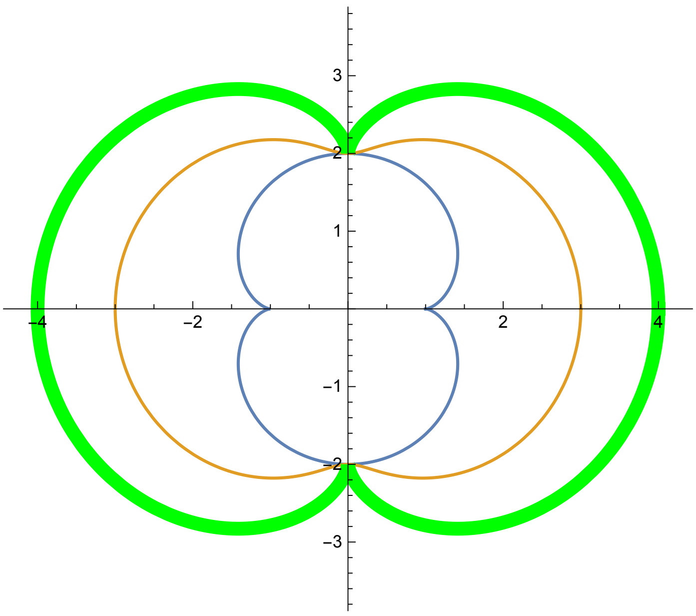
```
a = 2;
mittenbild = ParametricPlot[{{xm1, ym1}, {xm2, ym2}} // Evaluate, {t, 0, 2 Pi}];
             parametrische Darstellung                 werte aus       Kreisza
```

a =.

```
a = 1;
nephrobildk = ParametricPlot[{xk[t], yk[t]},
              parametrische Darstellung
   {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle → {Thickness[0.005], Dashed, Red}];
    Krei…        Darstellungsstil Dicke          gestrichelt rot
```

a =.

```
Show[mittenbild, nephrobildk, nephroibild, PlotRange → {{-4, 4}, {-3.5, 3.5}}]
zeige an                                    Koordinatenbereich der Graphik
```



Rechnerischer Beweis für die Mittenkurve

```
xm1 // TrigExpand
ym1 // TrigExpand
```

erweitere trigonometrisch

$$\frac{3}{4} a \operatorname{Cos}[t] - \frac{1}{4} a \operatorname{Cos}[t]^3 + \frac{3}{4} a \operatorname{Cos}[t] \operatorname{Sin}[t]^2$$

$$a \operatorname{Sin}[t]^3$$

$$\text{Eliminate}\left[\left\{x == \frac{a}{4}\left(3 c - c^3 + 3 c \left(1 - c^2\right)\right), y == a s^3, c^2 + s^2 == 1\right\}, \{c, s\}\right] \text{ // FullSimplify}$$

eliminiere — vereinfache vollständig

$$a^6 + 48 a^2 \left(x^2 + y^2\right)^2 + 3 a^4 \left(-4 x^2 + 5 y^2\right) == 64 \left(x^2 + y^2\right)^3$$

$$\text{gruen} = 4 a^6 + 3 a^4 \left(5 x^2 - 4 y^2\right) + 12 a^2 \left(x^2 + y^2\right)^2 == 4 \left(x^2 + y^2\right)^3 \text{ /. } a \to \frac{a}{2} \quad \text{(* Grüne Nephroide*)}$$

$$\frac{a^6}{16} + \frac{3}{16} a^4 \left(5 x^2 - 4 y^2\right) + 3 a^2 \left(x^2 + y^2\right)^2 == 4 \left(x^2 + y^2\right)^3 \quad \text{(* mal 16 von Hand *)}$$

$$a^6 + 3 a^4 \left(5 x^2 - 4 y^2\right) + 48 a^2 \left(x^2 + y^2\right)^2 == 64 \left(x^2 + y^2\right)^3 \text{ // Expand} \quad \text{(* Tausch x--y im Kopf *)}$$

multipliziere aus

passt, auch das ist tatsächlich die um Faktor 2 verkleinerte und gedrehte Nephroide

Die andere Mittenkurve

```
xm2
ym2 // TrigExpand
```

erweitere trigonometrisch

$$a \operatorname{Cos}[t] + \frac{1}{2} a \operatorname{Cos}[t] \operatorname{Cos}[2 t]$$

$$\frac{5}{4} a \operatorname{Sin}[t] + \frac{3}{4} a \operatorname{Cos}[t]^2 \operatorname{Sin}[t] - \frac{1}{4} a \operatorname{Sin}[t]^3$$

$$\text{Eliminate}\left[\left\{x == a\ c + \frac{1}{2} a c \left(c^2 - s^2\right), y == \frac{a}{4}\left(5 s + 3 c^2 s - s^3\right), c^2 + s^2 == 1\right\}, \{c, s\}\right] \text{ // FullSimplify}$$

eliminiere — vereinfache vollständig

$$9 a^6 + a^4 \left(68 x^2 - 57 y^2\right) + 112 a^2 \left(x^2 + y^2\right)^2 == 64 \left(x^2 + y^2\right)^3$$

$$4 a^6 + 3 a^4 \left(5 x^2 - 4 y^2\right) + 12 a^2 \left(x^2 + y^2\right)^2 == 4 \left(x^2 + y^2\right)^3 \text{ /. } a \to \frac{a}{2}$$

```
mitte2 = a^6 + 3 a^4 (5 x^2 - 4 y^2) + 48 a^2 (x^2 + y^2)^2 == 64 (x^2 + y^2)^3 // Expand
```
multiplizi

$a^6 + 15 a^4 x^2 + 48 a^2 x^4 - 12 a^4 y^2 + 96 a^2 x^2 y^2 + 48 a^2 y^4 == 64 x^6 + 192 x^4 y^2 + 192 x^2 y^4 + 64 y^6$

Gleichung der Epitrochoiden

```
eq = ({x == a/2 (3 Cos[t] - k Cos[3 t]), y == a/2 (3 Sin[t] - k Sin[3 t])} // TrigExpand) /.
  {Cos[t] → c, Sin[t] → s} (* übliche Substitution*)
```
Kosinus Kosinus Sinus Sinus erweitere trigonomet
Kosinus Sinus

$\{x == \frac{3 a c}{2} - \frac{1}{2} a c^3 k + \frac{3}{2} a c k s^2, y == \frac{3 a s}{2} - \frac{3}{2} a c^2 k s + \frac{1}{2} a k s^3\}$

```
eq = AppendTo[eq, c^2 + s^2 == 1]
```
hänge an bei

$\{x == \frac{3 a c}{2} - \frac{1}{2} a c^3 k + \frac{3}{2} a c k s^2, y == \frac{3 a s}{2} - \frac{3}{2} a c^2 k s + \frac{1}{2} a k s^3, c^2 + s^2 == 1\}$

```
Subtract @@ Eliminate[eq, {c, s}] // Expand
```
subtrahiere eliminiere multipliziere aus

$-81 a^6 k^2 + 18 a^6 k^4 - a^6 k^6 + 216 a^4 k x^2 - 36 a^4 k^2 x^2 + 12 a^4 k^4 x^2 - 144 a^2 x^4 - 48 a^2 k^2 x^4 + 64 x^6 - 216 a^4 k y^2 - 36 a^4 k^2 y^2 + 12 a^4 k^4 y^2 - 288 a^2 x^2 y^2 - 96 a^2 k^2 x^2 y^2 + 192 x^4 y^2 - 144 a^2 y^4 - 48 a^2 k^2 y^4 + 192 x^2 y^4 + 64 y^6$

Für einen Koeffizientenvergleich wird auch die zweite Mittenkurve aufgelöst:

```
mitte2 = Subtract @@ mitte2
```
subtrahiere

$a^6 + 15 a^4 x^2 + 48 a^2 x^4 - 64 x^6 - 12 a^4 y^2 + 96 a^2 x^2 y^2 - 192 x^4 y^2 + 48 a^2 y^4 - 192 x^2 y^4 - 64 y^6$

```
Solve[-81 z + 18 z^2 - z^3 == 1, z] // N   (*  k^2=z , Absolutes Glied*)
```
löse numerischer Wert

{{z → -0.012312}, {z → 9.00616 - 0.333049 i}, {z → 9.00616 + 0.333049 i}}

Das $z = k^2$ folgt auch hier, dass die 2. Mittenkurve **keine Eplitrochoide** ist.

Nochmal mit den Koeffizienten von x^2:

```
Solve[216 k - 36 k^2 + 12 k^4 == 15, k] // N
```
löse numerischer Wert

{{k → 1.47344 - 1.93005 i}, {k → 1.47344 + 1.93005 i}, {k → -3.01715}, {k → 0.070266}}

Es hätte sich immer dasselbe k ergeben müssen.

Die andere Mittenkurve ist keine Epitrochoide

Ausnutzung dieser Eigenschaft in Aufgabe 9.11Punkt 3.