Kurven sehen und verstehen

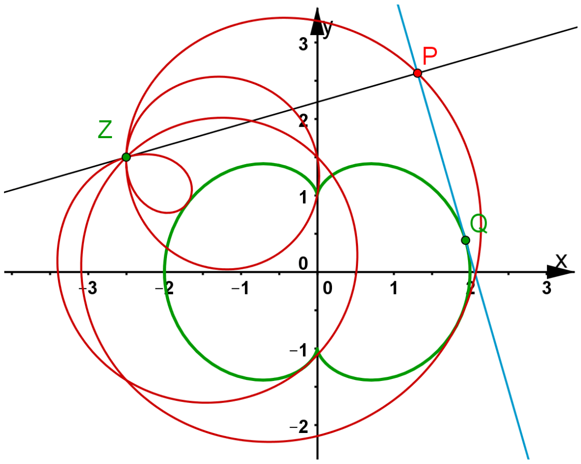
Haftendorn April 2017, http://www.kurven-sehen-und-verstehen.de

Nephroide und ihre Pedalkurven (Fußpunktkurven)

In[3]:= **Quit**

beende Kernel

Damit die Lösungen unabhängig sind, lasse ich die nötigen Teile aus der Evoluten-Datei hier stehen.



Nephroide, doppelt achsensymmetrisch

In[1]:= $x[t\_] := \frac{a}{2}\left(3\,\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Cos}[3\,t]\right)$

Kosinus Kosinus

$y[t\_] := \frac{a}{2}\left(3\,\mathrm{Sin}[t] + \mathrm{Sin}[3\,t]\right)$

Sinus Sinus

Bild

Eliminierung von t (siehe bei Evolute)

$$4\,a^6 + 3\,a^4\left(5\,x^2 - 4\,y^2\right) + 12\,a^2\left(x^2 + y^2\right)^2 == 4\left(x^2 + y^2\right)^3$$

implizite kartesische Gleichung der Nephroide, Spitzenabstand a

Schnitte mit den Achsen (siehe bei Evolute)

Rechnungen zu Tangenten

Tangentengleichung

```
m[t_] := - (Cos[t] + Cos[3 t])/(Sin[t] + Sin[3 t])   (* Herleitung aus ẏ/ẋ wie bei Evolute*)
```

In[13]:=
```
(tang[x_] := m[t] (x - x[t]) + y[t] // FullSimplify) ; tang[x]
                                        vereinfache vollständig
```

Out[13]= $\mathrm{Csc}[t]\left(a - \frac{1}{2} x \,\mathrm{Cos}[2 t]\,\mathrm{Sec}[t]\right)$

Lote durch den Pol Z=(z,d) auf die Tangenten

In[14]:=
```
lot[x_] := ((Sin[t] + Sin[3 t])/(Cos[t] + Cos[3 t]) (x - z) + d // FullSimplify); lot[x]
                                                  vereinfache vollständig
```

Out[14]= $d + (x - z)\,\mathrm{Tan}[2 t]$

Schnitt der Lote mit den Tangenten

mit der üblichen Substitution

In[15]:=
```
lo = Solve[lot[x] == tang[x], x] // FullSimplify
     löse                          vereinfache vollst
```

Out[15]= $\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\mathrm{Sin}[4 t]\left(-d + a\,\mathrm{Csc}[t] + z\,\mathrm{Tan}[2 t]\right)\right\}\right\}$

In[16]:=
```
lot[x] /. lo[[1, 1]]
```

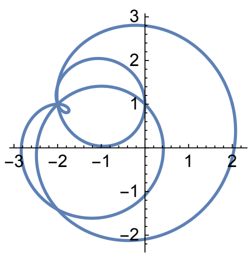
Out[16]= $d + \mathrm{Tan}[2 t]\left(-z + \frac{1}{2}\mathrm{Sin}[4 t]\left(-d + a\,\mathrm{Csc}[t] + z\,\mathrm{Tan}[2 t]\right)\right)$

In[22]:=
```
{a = 1, z = -2, d = 1};
ParametricPlot[{1/2 Sin[4 t] (-d + a Csc[t] + z Tan[2 t]),
parametrische Darstell·  Sinus       Kosekans   Tangente

  d + Tan[2 t] (-z + 1/2 Sin[4 t] (-d + a Csc[t] + z Tan[2 t]))}, {t, 0, 2 Pi}]
      Tangente            Sinus       Kosekans   Tangente                Kreisz

{a =., z =., d =.};
```

Out[23]=



Berechnung der Pedalkurve

In[26]:=
```
xt = x == 1/2 (Sin[4 t] // TrigExpand) (-d + a Csc[t] + z (Tan[2 t] // TrigExpand))
```
Sinus, erweitere trigonometris…, Kosekans, Tangente, erweitere trigonom

Out[26]= $x == \frac{1}{2}\left(4\,\mathrm{Cos}[t]^3\,\mathrm{Sin}[t]-4\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]^3\right)\left(-d+a\,\mathrm{Csc}[t]+\frac{2\,z\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]}{\mathrm{Cos}[t]^2-\mathrm{Sin}[t]^2}\right)$

In[27]:=
```
xsc = x == 1/2 (4 Cos[t]^3 Sin[t] - 4 Cos[t] Sin[t]^3) (-d + a Csc[t] + (2 z Cos[t] Sin[t])/(Cos[t]^2 - Sin[t]^2)) /.
    {Sin[t] -> s, Cos[t] -> c, Csc[t] -> 1/s} // FullSimplify
```
Sinus, Kosinus, Kosekans, Sinus, Kosinus, Kosekans, vereinfache vollständig

Out[27]= $x == 2\,c\,\left((c-s)\,(c+s)\,(a-d\,s)+2\,c\,s^2\,z\right)$

In[29]:=
```
yt = y == d + (Tan[2 t] // TrigExpand) (-z + x)
```
Tangente, erweitere trigonometrische F

Out[29]= $y == d+\frac{2\,(x-z)\,\mathrm{Cos}[t]\,\mathrm{Sin}[t]}{\mathrm{Cos}[t]^2-\mathrm{Sin}[t]^2}$

In[30]:=
```
ysc = yt /. {Sin[t] -> s, Cos[t] -> c}
```
Sinus, Kosinus

Out[30]= $y == d+\frac{2\,c\,s\,(x-z)}{c^2-s^2}$

Die beiden Schnittgleichungen und $c^2 + s^2 == 1$

In[34]:=
```
pedal = Subtract @@ (Eliminate[{xsc, ysc, c^2 + s^2 == 1}, {s, c}] // FullSimplify)
```
subtrahiere, eliminiere, vereinfache vollstär

Out[34]= $4\,a^4\,(d-y)^2\left((d-y)^2+(x-z)^2\right)-4\,a^2\left((d-y)^2+(x-z)^2\right)\left(x^2+y\,(-d+y)-x\,z\right)^2+\left(x^2+y\,(-d+y)-x\,z\right)^4$

In[37]:=
```
pedal /. d -> 0 // FullSimplify
```
vereinfache vollständig

Out[37]= $4\,a^4\,y^2\left(y^2+(x-z)^2\right)-4\,a^2\left(y^2+(x-z)^2\right)\left(x^2+y^2-x\,z\right)^2+\left(x^2+y^2-x\,z\right)^4$

In[38]:=
```
pedalAchse = 4 a^2 (y^2 + (x - z)^2) (y^2 - (x^2 + y^2 - x z)^2) + (x^2 + y^2 - x z)^4 == 0
```

Out[38]= $\left(x^2+y^2-x\,z\right)^4+4\,a^2\left(y^2+(x-z)^2\right)\left(y^2-\left(x^2+y^2-x\,z\right)^2\right) == 0$

In[91]:=
```
{a = 1, z = -4};
pedBild = ContourPlot[pedalAchse // Evaluate, {x, -4.2, 2.5}, {y, -4, 4},
   ContourStyle -> Red, PlotPoints -> 100, AspectRatio -> Automatic];
{a =., z =.};
```
Konturgraphik, werte aus, Konturenstil, rot, Anzahl der Punkte in …, Seitenverhältnis, automatisch

In[93]:=
```
Show[pedBild, nephrobild, Graphics[{{PointSize[0.03], Point[{-4, 0}]},
  {Thickness[0.008], RGBColor[0.5, 0, 1], Circle[{-4, 0}, 6]}}]]
```
zeige an Graphik Punktgröße Punkt
Dicke RGB Farbe Kreis

Out[93]=