Haftendorn: Kurven erkunden und verstehen,
Springer 9783 658 14749 5 (e-pdf)

Area!

Parameter hat, um die Form z. B. an das Foto in Abb. 9.24 a) anzupassen: Den Scheitel in (0,1) zu legen, erfordert $f(0) = a + c = 1$. Die Ordinate $y = 6$ wird für $x = 1.32$ erreicht. Das bringt dann die Gleichung $a \cosh\left(\frac{1.32}{a}\right) + 1 - a = 6$. Diese *transzendente Gleichung* kann man lediglich numerisch lösen. Das tut GeoGebra-CAS, wenn man x anstelle von a schreibt und `NLöse` anfordert. Den Parabelkoeffizienten kann man ausrechnen oder ebenso bestimmen. Auch eine interaktive Anpassung der Parameter ist möglich und bei Anzeige von drei Dezimalen auch nicht ungenauer. In der Aufgabe 9.18 können Sie sich mit der Kettenlinie befassen.

Beachten Sie: *Nicht jede Kosinus hyperbolicus-Funktion ist eine Kettenlinie*, [illegible] der lineare Koeffizient vor dem cosh und beim Argument *x Kehrwerte* voneinander. Also findet man $a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ und auch $\frac{1}{k}\cosh(k\,x)$ für die Kettenlinie. Ohne diese Kopplung ist die Kurve *keine Kettenlinie*, sondern eine allgemeine Kosinus hyperbolicus Funktion.

9.6.4.4 Area-Funktionen kehren die Hyperbelfunktionen um

Die Umkehrfunktion des Kosinus hyperbolicus heißt **Areakosinus hyperbolicus**, kurz: Areakosinus. Entsprechend gibt es den **Areasinus**. Zunächst einmal: lateinisch oder englisch *area* als *Fläche* ist tatsächlich gemeint. Zur Kreisfunktion Kosinus gehört als Umkehrfunktion der Arkus-Kosinus. Hier steht das lateinische Wort *arcus* Pate, das *Bogen* heißt. Hat man nämlich einen Sinuswert, z. B. $\sin(x) = 0.8$, so beantwortet man die Frage nach dem zugehörigen x mit Hilfe von $x = \arcsin(0.8)$ und erhält $x = 0.9273$, den Hauptwert. x ist zu deuten als Winkel im Bogenmaß, also ist x die Länge eines **Bogens** im Einheitskreis. Die Funktion, die x liefert, heißt zu recht **Arkusfunktion**.

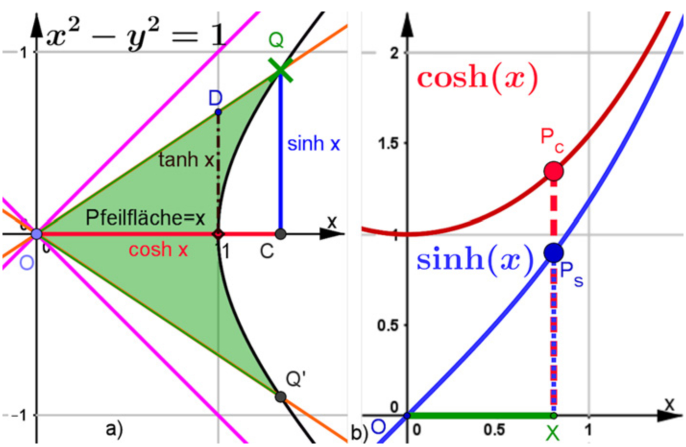

Abb. 9.25 **Die Areafunktionen** liefern tatsächlich Flächen. Aus $\sinh(x) = 0.85$ folgt mit dem Areasinus $x = \operatorname{arsinh}(0.85) = 0.77$ und das ist die Größe der pfeilförmigen (grünen) Fläche, ein **Areal**. Ebenso folgt aus $\cosh(x) = 1.3$ nun mit dem Areakosinus $x = \operatorname{arcosh}(1.3) = 0.77$. Die gekoppelten Grafikfenster zeigen die Zusammenhänge.

Dagegen werden entsprechende Umkehrfragen bei den Hyperbelfunktionen mit den **Areafunktionen** beantwortet. Auch sie tun, was ihr Name verspricht: sie antworten mit einer Fläche, einem **Areal**. In Abb. 9.25 sind die Zusammenhänge dargestellt, die nun näher erläutert und bewiesen werden sollen.

Eine Parameterdarstellung der Hyperbel $x^2-y^2=1$ können wir „erfinden“ mit $x(t) = \cosh(t)$, zunächst ohne an eine Bedeutung von t zu denken. Das geht für den rechten Ast, da beide Seiten nicht kleiner als 1 sind. Es ist dann $\cosh(t)^2 - y(t)^2 = 1$, also $y(t)^2 = \cosh(t)^2 - 1 = \sinh(t)^2$, nach Gleichung 9.31. Bevor wir im Beweis weitergehen, sei bemerkt:

Eine Parameterdarstellung der Hyperbel

$$\text{Für} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{gilt} \quad x(t) = \pm a\cosh(t) \quad \text{und} \quad y(t) = b\sinh(t). \tag{9.36}$$

Mit den Gleichungen 9.33 können Sie selbst leicht zeigen, dass die Mittelpunktsgleichung erfüllt wird. Das sind die übl. Gl. für sinh und cosh.

Die Polardarstellung der Hyperbel $x^2-y^2=1$ springt in Abb. 9.25 a) ins Auge. Wenn man den Polarwinkel θ von Q verwendet, gilt $1 = r^2\cos(\theta)^2 - r^2\sin(\theta)^2 = r^2\left(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2\right) = r^2\cos(2\theta)$, also:

$$\text{Polargleichung der Hyperbel} \quad x^2-y^2=1 \quad \text{ist} \quad r = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos(2\theta)}} \tag{9.37}$$

Formel für Fl- in Polardarst.

Beweis (Zur Pfeilfläche A) Bezug Abb. 9.25
A bekommen wir nun mit der Polargleichung und Gleichung 11.10 in den Griff. Es ist $A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\theta r(th)^2 d\,th = \int_0^\theta \frac{1}{\cos(2th)} d\,th = \frac{1}{2}\ln\frac{\cos(\theta)+\sin(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)}$. Ich will nicht verhehlen, dass man für das Integral ein kräftiges CAS braucht oder Integral Nr. 325 im [Bronstein 1999]. In beiden Fällen sind noch eigene Umformungen nötig, besonders in der folgenden Weiterverarbeitung. Es ist nämlich nun $e^A + e^{-A}$ zu bilden. Dazu muss sich der Faktor $\frac{1}{2}$ in eine Wurzel im Argument des Logarithmus verwandeln und das Minuszeichen von A muss das Argument in seinen Kehrwert drehen. Nach diesen Taten hat man $\frac{\sqrt{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}{\sqrt{\cos(\theta)-\sin(\theta)}} + \frac{\sqrt{\cos(\theta)-\sin(\theta)}}{\sqrt{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}$, einen Term von beeindruckender Symmetrie. So etwas macht kein CAS von alleine. Es geht weiter mit dem Hauptnenner und Zusammenfassungen, bis da steht $e^A + e^{-A} = \frac{2\cos(\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = 2r(\theta)\cos(\theta)$. Damit haben wir bewiesen: $\cosh(A) = x = \cosh(t)$, mit dem $x(Q)$, der roten Strecke in Abb. 9.25 a), und es gilt $A = t$. In Abb. 9.25 b) ist diese Strecke Ordinate, Abszisse ist hier $x = A$, als rote Kurve ist $y = \cosh(x) = \cosh(A)$ dargestellt. Entsprechendes kann man auch für den Sinus hyperbolicus zeigen. $\square$

Nun ist klar, warum diese Umkehrfunktionen **Area**-Funktionen heißen. Offenbar in Unkenntnis dieser Tatsache heißen leider in GeoGebra und Mathematica diese Funktionsnamen arcsinh, arccosh, bzw. ArcSinh, ArcCosh.

Nun ist auch deutlich geworden, dass das Adjektiv **hyperbolicus** zu recht besteht, und der Name **Hyperbelfunktionen** klingt nicht mehr so fremd.

Aufgabe 9.18 Kettenlinie Siehe Extraaufgabe

1. Berechnen Sie für die Kettenlinie Ableitung, Krümmung $\kappa(x)$ und Krümmungsradius $R(x)$. Verwenden Sie alle drei Aussagen von Gleichung 9.31.
2. In der Form $a \cdot R(x) = f(x)^2$, die Sie aus dem vorigen Top erhalten, sehen Sie, dass Sie mit dem Höhensatz eine Konstruktion des Krümmungskreis-Mittelpunktes erfinden können. Tangente und Normale seien dabei für einen zugfesten Punkt P von GeoGebra beschafft. Sichern Sie Ihr Ergebnis durch die Evolute als Hüllkurve ab. Siehe dazu Abschnitt 9.3.
3. Bei Kettenlinien und Parabeln, die sich schneiden und denselben Scheitel haben, ist immer die Parabel im Scheitel „schlanker". Sehen Sie sich das an weiteren Beispielen an und beweisen Sie diese Behauptung. Welche Folgen hat ein gleicher Scheitelkrümmungsradius?
4. Zeigen Sie, dass die Bogenlänge der Kettenlinie vom Scheitel bis zur Stelle x durch $s(x) = a \sinh(\frac{x}{a})$ gegeben ist. In Abb. 9.24 a) handelt es sich um die Kettenlinie mit $a = 0.4$ und $c = 1 - a$. Die Parabel ist $y = 2.87x^2 + 1$, der Eckpunkt hat die Ordinate 6. Vergleichen Sie die abgebildeten Längen.
5. Zeichnen Sie mit GeoGebra zu einer Kettenlinie die Evolvente, deren Spitze der Scheitel ist. Sie erhalten eine Traktrix. Realisieren Sie auch umgekehrt eine Traktrix und bilden Sie als Hüllkurve ihrer Normalen eine Kettenlinie. Also gilt: **Die Evolute einer Traktrix ist eine Kettenlinie**. Zur Traktrix lesen Sie Abschnitt 9.6.3, zu Evoluten und Evolventen die Abschnitte 9.2 und 9.3.3.
6. Blättern Sie jetzt einmal zurück zu Abschnitt 8.3.3, in dem der Brennpunkt einer abrollenden Parabel eine Kettenlinie erzeugt. Auch dieses ist ein Baustein für die Beobachtung: **In der Mathematik ist alles mit allem verwoben.**

9.6.4.5 Hängebrücken und andere Ketten mit einer Last

Eigentlich ist es nicht erstaunlich, dass eine an die Kette gehängte Last die Form der hängenden Kette beeinflusst. Mit einer schweren Last in der Mitte würde sie V-förmig hängen. Mit einer über die ganze Breite verteilten Last ist ein anderer Ansatz als in Abschnitt 9.6.4.3 nötig. [Peters 2009] führt einen solchen durch. Aber auch von der Quelle zur Abb. 9.26, der [DMV Website 2000], gelangt man zu Ausführungen von Markus Koecher [Koecher 2005a, b], der eine auf schulischem Niveau verständliche Herleitung beider Fälle bietet. Wie zu erwarten, wird die Kettenform durch die Last etwas „schlanker", wie es zur Parabel passt. Versuchen Sie in Abb. 9.26 eine Kettenlinie einzupassen. Sie werden erleben: sie passt nicht.