Kurven sehen und verstehen

Haftendorn Juli 2017, http://www.kurven-sehen-und-verstehen.de

Inversiongleichungen, Ursprungs-Kreis, Radius k,

```
invert = {x → k² x/(x² + y²), y → k² y/(x² + y²)}
```

$$\left\{x \to \frac{k^2 x}{x^2+y^2},\ y \to \frac{k^2 y}{x^2+y^2}\right\}$$

Inversion aller Kegelschnitte in drei Lagen

Kegelschnitte mit Scheitel S=(m,0)

```
kegscheitel = y² == 2 p (x - m) - (1 - ϵ²) (x - m)²
```

$$y^2 == 2 p (-m+x) - (-m+x)^2 \left(1-\epsilon^2\right)$$

```
(y² == 2 p (x - m) - (1 - ϵ²) (x - m)²) /. invert
```

$$\frac{k^4 y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} == 2 p \left(-m+\frac{k^2 x}{x^2+y^2}\right) - \left(-m+\frac{k^2 x}{x^2+y^2}\right)^2 \left(1-\epsilon^2\right)$$

```
k⁴ y²/(x² + y²)² == 2 p (-m + k² x/(x² + y²)) - (-m + k² x/(x² + y²))² (1 - ϵ²) // FullSimplify
```

vereinfache vollständig

```
m (x² + y²) (m + 2 p - m ϵ²) + k⁴ (1 - x² ϵ²/(x² + y²)) == 2 k² x (m + p - m ϵ²); (* Nenner beseitigen*)
```

```
invBild =
  m (x² + y²)² (m + 2 p - m ϵ²) + k⁴ (x² + y² - x² ϵ²) == 2 k² x (x² + y²) (m + p - m ϵ²) // FullSimplify
```

vereinfache vollst

$$\left(k^2 x - m \left(x^2+y^2\right)\right)^2 \epsilon^2 == \left(x^2+y^2\right) \left(k^4 - 2 k^2 (m+p) x + m (m+2 p) \left(x^2+y^2\right)\right)$$

Das sind alle Kreis-Spiegelbilder aller x-Achsen-symmetrischer Kegelschnitte mit Scheitel im (m,0)

Scheitel S im Ursprung

```
ϵ =.; k =.; p =.; kegscheitel /. m → 0
```

$y^2 == 2\,p\,x - x^2\,(1 - \epsilon^2)$

```
invBild /. m → 0  (*Bild aller Kegelschnittevmit Schreitel in O *)
```

Ordnu

$k^4\,x^2\,\epsilon^2 == (k^4 - 2\,k^2\,p\,x)\,(x^2 + y^2)$

```
sur = k² x² ϵ² == (k² - 2 p x) (x² + y²)
   (* k² abdividieren, Bild aller Kegelschnitte mit Schreitel in O *)
```

Ordnu

$k^2\,x^2\,\epsilon^2 == (k^2 - 2\,p\,x)\,(x^2 + y^2)$

$\texttt{sur} = -\frac{k^2\,\epsilon^2}{2\,p}\,x^2 == \left(x - \frac{k^2}{2\,p}\right)(x^2 + y^2);$ (* ok geprüft, Sluze $c=\frac{k^2}{2p}$, $a=-c\,\epsilon^2$*)

Für jedes Tripel k,p,ϵ, ergibt sich eine Sluze-Kurve

Jede Sluze-Kurve mit negativem a und positivem c hat-bei festem k- mit $p = \frac{k^2}{2\,c}$ und $\epsilon = \sqrt{\frac{-a}{c}}$ einen Kegelschnitt als Inversionsbild.

Allgemeine Baron-Sluze-Kurve (im waagerechter Lage, senkrechte Asymptote) hat rechte vor dem x^2 ein *a*. :

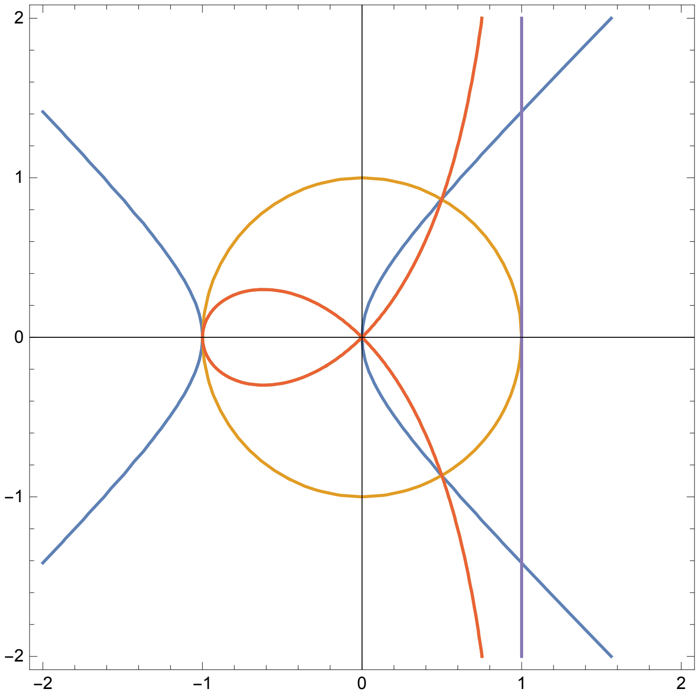
$\texttt{sluze} = (x - c)\,(x^2 + y^2) == -c\,\epsilon^2\,x^2$

$(-c + x)\,(x^2 + y^2) == -c\,x^2\,\epsilon^2$

$\texttt{sluzeCis} = (x + c\,(\epsilon^2 - 1))\,x^2 == (-x + c)\,y^2$ (* als Cissoide, auch hier $c=\frac{k^2}{2p}$ positiv*)

$x^2\,(x + c\,(-1 + \epsilon^2)) == (c - x)\,y^2$

```
a = 3;
p = 1/2; k = 1; ϵ = √2 ;  c = 1;
sluzeGesamt = ContourPlot[{y² == 2 p x - x² (1 - ϵ²), x² + y² == k², sluze // Evaluate,
              Konturgraphik                                              werte aus
    sluzeCis // Evaluate, x == c}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, Axes → True]
                werte aus                                   Axen   wahr
a =.;
c =.;
p =.; k =.; ϵ =.; c =.; (*sluze und sluzeCis liegen aufeinander*)
```



Knotenscheitel bei Hyperbelbildern bzw. Scheitel des Bogens

```
x0 = c (1 - ϵ²) /. c → k²/(2 p)
```

$$\frac{k^2 \left(1-\epsilon^2\right)}{2 p}$$

Kegelschnitte in Brennpunktlage, Polare Form

```
r[θ_] := p/(1 - ϵ Cos[θ]); rinv[θ_] := k²/r[θ]; r[θ]
rinv[θ]
```

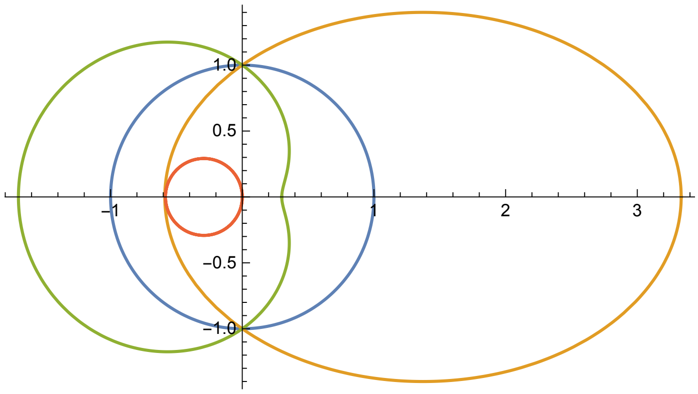
$$\frac{p}{1-\epsilon \,\mathrm{Cos}[\theta]}$$

$$\frac{k^2 \left(1-\epsilon \,\mathrm{Cos}[\theta]\right)}{p}$$

Dieses ist die Polargleichung von Pascal’schen Schnecken

```
p = 1.2;
k = 1;
ϵ = 0.7;  PolarPlot[{k, r[θ], rinv[θ], - (k^2 ϵ)/p Cos[θ]}, {θ, 0, 2 Pi}]
          Polardarstellung                  Kosinus          Kreisz

p =.;
k =.;
ϵ =.; (*rot ist der Wanderkreis für die Pascalschen Schnecken*)
```




```
p = 1; k = 1; ϵ = 1.0000001;  PolarPlot[{k, r[θ], rinv[θ]}, {θ, 0, 2 Pi},
                              Polardarstellung                  Kreisza
 PlotRange → {{-2, 2}, {-2, 2}}, PlotStyle → Thick];
 Koordinatenbereich der Graphik   Darstellungsstil dick
p =.;
k =.;
ϵ =.;

Manipulate[PolarPlot[{k, p/(1 - ϵ Cos[θ]), (k^2 (1 - ϵ Cos[θ]))/p },
manipuliere Polardarstellung
  {θ, 0, 2 Pi}, PlotStyle → Thick, PlotRange → {{-2, 2}, {-2, 2}}],
   Krei··· Darstellungsstil dick   Koordinatenbereich der Graphik
 {{ϵ, 0.7}, 0, 1.5, Appearance → {"Open"}},
                    Darstellung    öffne
 {{p, 1}, 0.8, 1.2, Appearance → "PopupMenu"},
                    Darstellung   Kontextmenü
 {{k, 1}, 0, 2}]

$Aborted
```

Kartesische Gleichungen direkt, Brennpunktlage

Umständlich

```
{p =., ϵ =.};
Eliminate[
```
eliminiere

$$\left\{x == \frac{p}{1 - \epsilon \,\mathrm{Cos}[\theta]} \mathrm{Cos}[\theta],\ y == \frac{p}{1 - \epsilon \,\mathrm{Cos}[\theta]} \mathrm{Sin}[\theta],\ x\text{^}2 + y\text{^}2 == \left(\frac{p}{1 - \epsilon \,\mathrm{Cos}[\theta]}\right)\text{^}2\right\}, \theta]$$

Kosinus Sinus

$$\frac{x\,(p + x\,\epsilon)^2}{x^2 + y^2} == x \,\&\&\, p^2 + 2\,p\,x\,\epsilon == x^2 + y^2 - x^2\,\epsilon^2$$

direkter

$$\{p =., \epsilon =.\};\ \mathrm{Solve}\left[r == \left(\frac{p}{1 - \epsilon\,\frac{x}{r}}\right), r\right]$$

löse

$$\{\{r \to 0\}, \{r \to p + x\,\epsilon\}\}$$

$$\{p = 1, \epsilon = 0.7\};$$
$$\mathrm{ContourPlot}\left[x^2 + y^2 == (p + \epsilon\,x)^2, \{x, -3, 4\}, \{y, -2, 2\}, \mathrm{AspectRatio} \to \mathrm{Automatic}\right];$$

Konturgraphik Seitenverhältnis automatisch

Invertieren

$$\{p =., \epsilon =., k =.\};\ x^2 + y^2 == (p + \epsilon\,x)^2 \;/.\; \mathrm{invert} \;//\; \mathrm{FullSimplify}$$

vereinfache vollst

$$\frac{k^4}{x^2 + y^2} == \left(p + \frac{k^2\,x\,\epsilon}{x^2 + y^2}\right)^2$$

$$\{p = 1, \epsilon = 0.7, k = 1\};\ \mathrm{ContourPlot}\left[\left\{k^4\,(x\text{^}2 + y\text{^}2) == \left(p\,(x\text{^}2 + y\text{^}2) + k^2\,\epsilon\,x\right)^2\right\},\right.$$

Konturgraphik

$$\left.\{x, -3, 4\}, \{y, -2, 2\}, \mathrm{AspectRatio} \to \mathrm{Automatic}\right];$$

Seitenverhältnis automatisch

$$\{p =., \epsilon =., k =.\};$$

Mit (fast) Anpassung an die im Buch gegebene Gleichung mit $c = \frac{k^2}{2\,p}$, hier k=1 gesetzt.

```
Manipulate[
manipuliere
 ContourPlot[{x² + y² == 1, x² + y² == (p + ϵ x)², (x^2 + y^2)/p² == (x^2 + y^2 + 1/p ϵ x)²},
 Konturgraphik
  {x, -3, 4}, {y, -2, 2}, AspectRatio → Automatic, Axes → True],
                          Seitenverhältnis  automatisch  Axen  wahr
 {{ϵ, 0.7}, 0, 1.5, ContinuousAction → Automatic, Appearance → {"Open"}},
                    fortlaufende Aktion  automatisch  Darstellung  öffne
 {{p, 1}, 0, 1.5, Appearance → {"Open"}}, SaveDefinitions → True]
                  Darstellung  öffne      speichere Definitionen  wahr
```

Kegelschnitte in Mittelpunktslage

```
elli = x^2/a² + y^2/b² == 1
hyp = x^2/a² - y^2/b² == 1
```

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} == 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} == 1$$

```
elli /. invert
hyp /. invert
```

$$\frac{k^4 x^2}{a^2 \left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{k^4 y^2}{b^2 \left(x^2 + y^2\right)^2} == 1$$

$$\frac{k^4 x^2}{a^2 \left(x^2 + y^2\right)^2} - \frac{k^4 y^2}{b^2 \left(x^2 + y^2\right)^2} == 1$$

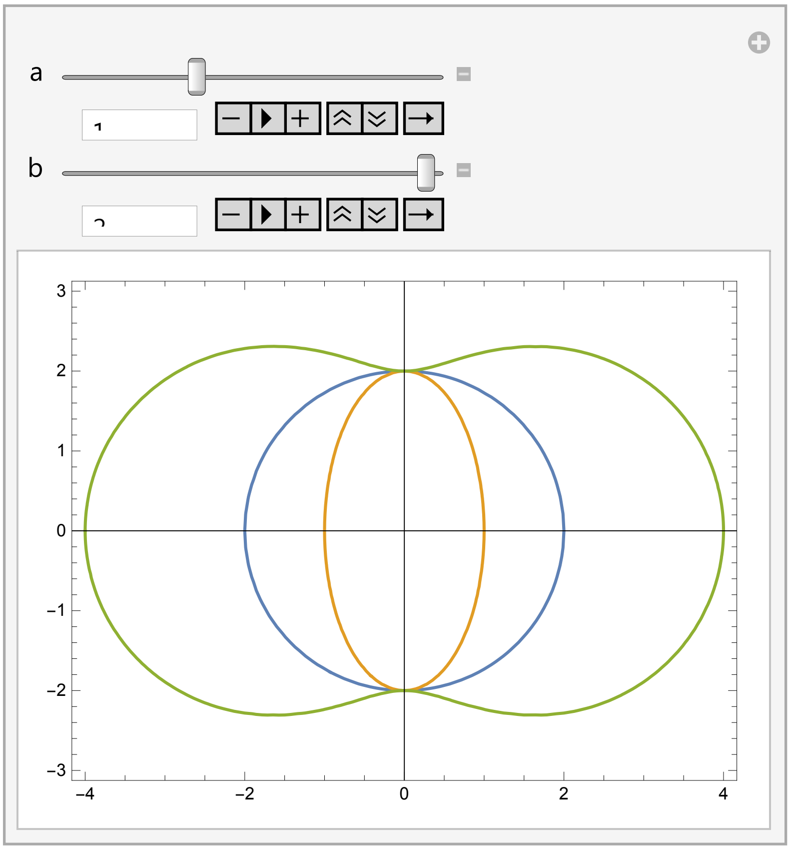
$$\frac{k^4 x^2}{a^2 \left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{k^4 y^2}{b^2 \left(x^2 + y^2\right)^2} == 1$$

Booth’sche Ovale und Booth’sche Lemniskaten

Sie haben nach Seite 216 die Gleichungen $c^2 x^2 + /- s^2 y^2 == (x^2 + y^2)^2$

```
k = 2;

Manipulate[ContourPlot[{x^2 + y^2 == k^2, x^2/a^2 + y^2/b^2 == 1, k^4 b^2 x^2 + k^4 a^2 y^2 == a^2 b^2 (x^2 + y^2)^2},
 manipuliere   Konturgraphik
  {x, -4, 4}, {y, -3, 3}, AspectRatio → Automatic, Axes → True],
                          Seitenverhältnis  automatisch  Axen  wahr
 {{a, 1}, 0, 3, ContinuousAction → Automatic, Appearance → {"Open"}},
                fortlaufende Aktion  automatisch  Darstellung  öffne
 {{b, 2}, 0, 2, Appearance → {"Open"}}, SaveDefinitions → True]
                Darstellung  öffne     speichere Definitionen  wahr
```



```
k = 2;
x =.;
Manipulate[ContourPlot[{x² + y² == k², x²/a² - y²/b² == 1, k⁴/a² x² - k⁴/b² y² == (x^2 + y^2)²},
manipuliere  Konturgraphik
  {x, -4, 4}, {y, -2, 2}, AspectRatio → Automatic, Axes → True],
                          Seitenverhältnis  automatisch  Axen  wahr
 {{a, √2}, 0, 3, ContinuousAction → Automatic, Appearance → {"Open"}},
                 fortlaufende Aktion  automatisch  Darstellung  öffne
 {{b, 1}, 0, 2, Appearance → {"Open"}}, SaveDefinitions → True]
                Darstellung  öffne     speichere Definitionen  wahr
```