In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

4.1.2 Die enge und die weite Versiera

Aufgabe 4.1 Weitere Eigenschaften der engen Versiera

Verwenden Sie im Folgenden ein CAS wenigstens für Integrale, höhere Ableitungen und Krümmung (siehe Hinweis).

1. Bestimmen Sie die rechts und links nicht begrenzte Fläche unter der engen Versiera.
2. Zeigen Sie, dass die enge Versiera in ihren Schnittpunkten mit dem erzeugenden Kreis besondere Tangenten hat.
3. Bestimmen Sie den Krümmungskreis für den Scheitel der engen Versiera.
4. Berechnen Sie den Krümmungsradius für die Punkte $(\pm a, a)$ und überlegen Sie eine Konstruktion für die beiden Krümmungskreise.

Hinweis

Zu GeoGebra-CAS und TI-Nspire-CAS finden Sie Hilfen auf der Website zum Buch.
Auf `http://www.wolfram-alpha.com` können Sie z. B. folgende Einzelbefehle nutzen:
`Integrate[TermVonx,x]` ist der Befehl für das unbestimmte Integral.
`Integrate[TermVonx,{x,a,b}]` ist das bestimmte Integral.
`D[TermVonx,x]` die erste und `D[TermVonx,{x,2}]` die zweite Ableitung. ◀

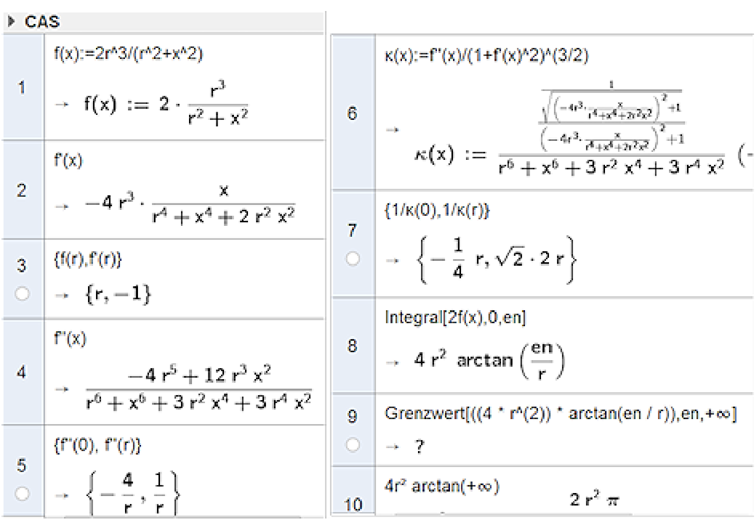

Abb. 4.1 Aufgabe 4.1 Enge Versiera
Berechnungen mit GeoGebra-CAS.
Dabei ist im CAS r geschrieben anstelle von a, denn in derselben GeoGebra-Datei ist $a = 2$ eine belegter Parameter. Will man im CAS den Parameter noch erkennen muss man ihn umbenennen.

Lösung:

Zu 1.: Es ist $f(x) :=$ .... in Zeile 1 definiert als Funktion. In Zeile 8 steht das Flächenintegral von 0 bis zu einem „Ende“ doppelt. Man nennt letzteres oft c oder b. In GeoGebra aber muss man aufpassen, dass man nicht Namen verwendet, die im Geometrie-Teil schon belegt sind. GeoGebra schafft es nicht, den Grenzwert für das Argument en/r zu berechnen. Nun lohnt es sich, mathematisch zu verstehen, dass die Divison durch r eine waagerechte Streckung des Arkustangens bedeutet. Das hat keine Wirkung auf die Asymptote $y = \frac{\pi}{2}$. So kommt als Fläche $2r^2\pi$ heraus und das ist die doppelte Fläche des grünen Erzeugungskreises. So ist es auf Seite 82 mitte schon angekündigt.

Zu 2.: Zeile 3 im CAS sichert, dass die Gerade SB tatsächlich Tangente im Punkt $B = (r, r)$ ist. Übrigens geht wegen der waagerechten Streckung auf die weite Versiera deren Tangente in $(2r, r)$ auch durch S.

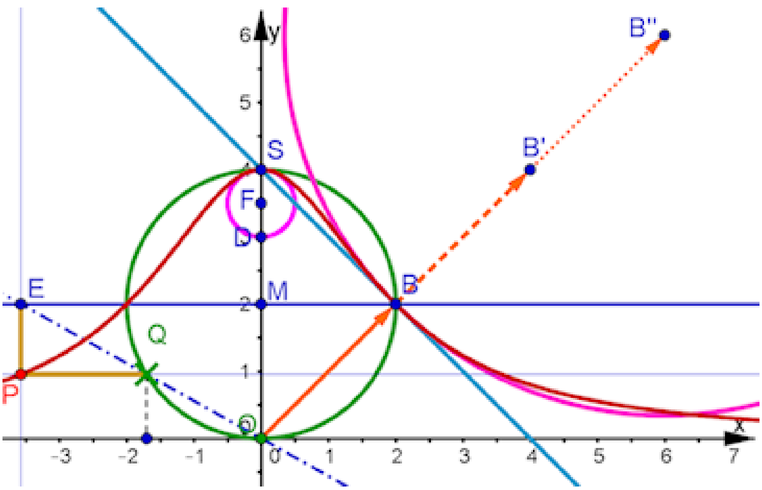

Abb. 4.2 **Aufgabe 4.1 Enge Versiera**
Konstruktionen, die unten erklärt sind.

Zu 3. und 4.: Die Krümmungsbestimmung führt mit Zeile 2 für f' und Zeile 4 für f'' zu der „wilden“ Krümmungsformel in Zeile 6. Dort ist rechts die Klammer $\left(-4r^5 + 12r^3x^2\right)$ nicht mehr im Bild. Man braucht aber nur bei $x = 0$ und bei $x = r$ die Krümmungsradien. In Zeile 7 ist $\varrho(0) = \frac{r}{4}$ und $\varrho(r) = 2\sqrt{2}r$ zu entnehmen.
Den Scheitelkrümmungskreis (violett, klein) erhält man durch achteln des Durchmessers des grünen Kreises.
Die Länge des orangefarbenen Vektors $\overrightarrow{OB}$ ist $\sqrt{2}r$, man muss ihn also nur zweimal anhängen, um B'' als Mittelpunkt des Krümmungskreises (violett, groß) zu erreichen.

GeoGebra-Datei afg4.1-versiera-eng.ggb