In: Kurven erkunden und verstehen
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

3.1.1 Konchoide des Nikomedes, genannt Hundekurve

Aufgabe 3.1 Visuelles Prüfen von Termumformungen
Prüfen Sie durch Zeichnung in GeoGebra und durch Rechnung: Welche der folgenden Gleichungen ist eine richtige Umformung der Hundekurven-Gleichung

$$(x^2+y^2)\cdot(y-a)^2=k^2y^2 \qquad (Gl.\ 3.1)?$$

a) $(x+y)^2\cdot(y-a)^2=k^2y^2$ b) $(x^2+y^2)\cdot(y^2-a^2)=k^2y^2$
c)$x^2(y-a)^2=y^2(k^2-(y-a)^2)$ d) $(k+y-a)(k-y+a)y^2=(x\cdot(y-a))^2$
e) $x^2y^2=(y+a)^2(k^2-y^2)$

Hinweis
Beachten Sie, dass sich Strichrechnung und Quadrierung nicht gut vertragen. Die dritte binomische Formel ist für d) nützlich. Gleichung e) zeigt zwar die verschobene Hundekurve, aber es ist keine zulässige Gleichungsumformung. ◀

Lösung Die gemeinte Hundekurve $(x^2+y^2)\cdot(y-a)^2)=k^2y^2$ ist rot dargestellt. In den folgenden Bilder ist $a=0.4$ und $k=1.6$. Die zu testenden Kurven tragen den Index k.

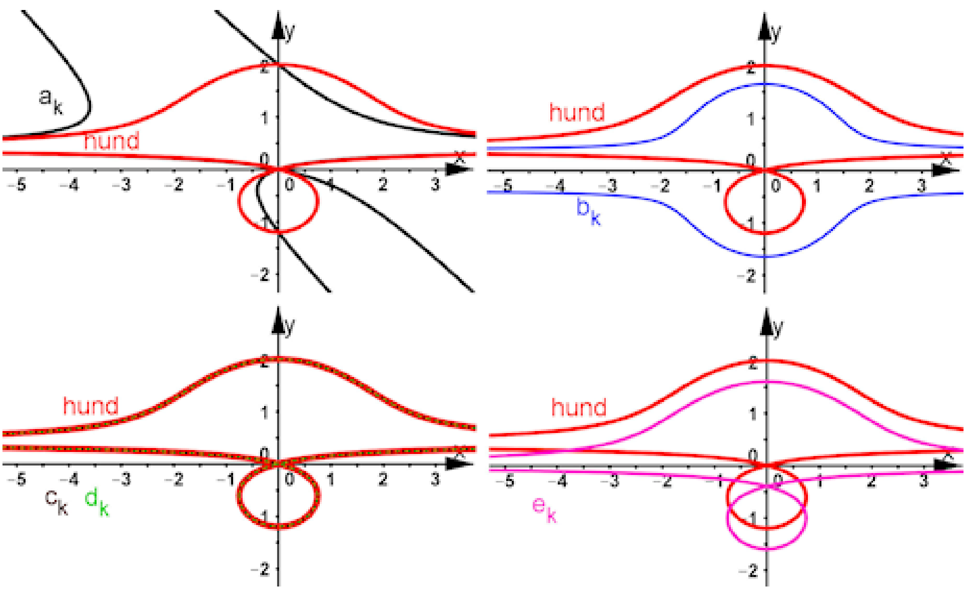

Abb. 3.1 Afg. 3.1 a_k und b_k passen gar nicht. Die Gleichungen sind **sicher falsch** umgeformt.Es ist e_k eine verschobene Hundekurve, aber e) ist keine erlaubte Gleichungsumformung (s.u.). Die Kurven c_k und d_k liegen in diesem Fenster auf der Kurve. Das bleibt auch bei Variation von a und k so. Ein rechnerischer Beweis steht unten.

Fehler für a) und für b) : Binomische Formeln sind nicht beachtet.

Beweis: c_k ist die Hundekurve: In Gl. 3.1 linke Klammer auflösen und $y^2(y-a)^2$ nach rechts bringen, dann y^2 ausklammern.

Beweis: d_k ist die Hundekurve: In c) das Quadrat des linken Produktes nach außen schreiben (Potenzgesetz!). Rechts die äußere Klammer mit der 3. binomischen Formel in zwei Klammern auflösen und in diesen zusammenfassen.

Beweis der Verschiebung: Die y-Achse wird geschnitten bei x=0, also gilt $0 = (y+a)^2(k^2-y^2)$. Also ist der Doppelpunkt bei $y = -a$ und die beiden anderen Schnittpunkte sind bei $y = \pm k$. Wenn es eine Hundekurve sein soll, müsste die Straße nun $y = 0$ sein. Eingesetzt in e) ergibt dies $x \cdot 0 = a^2k^2$, eine Gleichung, die bei „echten“ Konchoiden (d.h. $a \neq 0$ und $k \neq 0$) nicht erfüllbar ist. Damit ist die x-Achse als Asymptote bestätigt. Wir verschieben also Gl. 3.1 um a nach unten, d.h. $(x^2+(y+a)^2)(y)^2 = k^2(y+a)^2$, also $x^2y^2 = (y+a)^2(k^2-y^2)$, also die Gleichung e). Damit ist bewiesen, dass die lilafarbene Kurve eine verschobene Hundekurve ist.

GeoGebra-Datei afg3.1-terme.ggb