In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

3.2.3 Schiefe Strophoide

Aufgabe 3.5 Strophoide zu einer waagerechten Geraden
Wählen Sie als Kurve C die waagerechte Gerade $y = c$ mit $B = (0, 0)$ und $A = (a, 0)$.

1. Konstruieren Sie die zugehörige Strophoide und sehen Sie sich die auftretenden Formen an. Formulieren Sie Ihre Beobachtungen.
2. Warum haben Sie, auch wenn Sie B und A nicht variieren und nur beliebige $c \geq 0$ zulassen, dennoch alle Strophoiden untersucht, bei denen die Kurve C eine Gerade parallel zu BA ist?
3. Raten Sie mit etwas Überlegung eine Asymptote (in Abhängigkeit von c) dieser Strophoiden. Untermauern Sie Ihre Wahl dadurch, dass GeoGebra nur den einen direkt sichtbaren Schnittpunkt mit Ihrer Geraden hat. Welche besondere Lage hat dieser Schnittpunkt?
4. Stellen Sie die drei Gleichungen für Q und P auf (entsprechend Abschnitt **??** oder Abschnitt **??**). Eliminieren Sie u und v. Es geht dieses Mal durchaus von Hand.
5. Überprüfen Sie Ihren Vorschlag für eine Asymptote an der Gleichung.
6. Zeigen Sie, dass die Kurve $C : y = c$ von der Strophoide nie geschnitten wird.
7. Stellen Sie sich selbst Fragen und versuchen Sie wenigstens näherungsweise Antworten zu finden.

Hinweis

Eine interaktive Datei und die Lösungen finden Sie hier unten. ◀

Lösung:

Zu 1.: Es ergibt sich eine geschlossene Teilkurve durch B und A unterhalb der Geraden $y = c$ und ein rechts und links ins Unendliche reichender Kurvenast über dieser Geraden. Er scheint auch Fälle zu geben, bei denen in der Nähe von A „in einem Zug“ gezeichnet werden kann. Das kann aber bei näheren Zusehen nicht bestätigt werden.

Zu 2.: Für negative c erhält man die an der x-Achse gespiegelte Version.

Zu 3.: Wenn man Q zieht, erkennt man, dass P für außen liegende Q die x-Achse nicht erreichen kann, ebenso wenig kann kann P' die Gerade $y = 2c$ erreichen. Diese Gerade ist damit die Asymptote. Ist $P = B$, so folgt $P' = (a, 2c)$. Dieser Punkt ist dann der einzige Schnittpunkt mit der Asymptote. Siehe Top 5.

Zu 4.: Gl.1: $v = c$, Gl.2: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = (a - u)^2 + c^2$, Gl.3 $yu = xv$. Wenige Zeilen führen zu $y(x^2 + y^2 - a^2) = 2c(x^2 + y^2 - ax)$. Eintragen in die GeoGebra-Datei zeigt dieselbe Kurve.

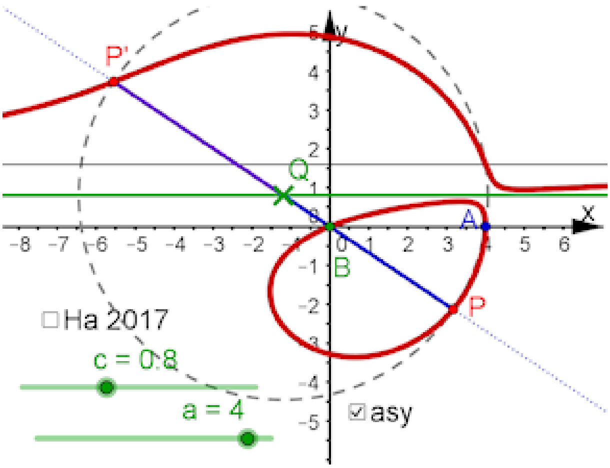

Abb. 3.6 Strophoide zu einer waagerechten Geraden
Setze die Gerade y=c und die Punkte $B = (0, 0)$ und $A(a, 0)$ mit beliebigen c und a.
Setze Q zugfest auf die Gerade und schlage um Q einen Kreis mit dem Radius $\overline{QA}$.
Die Schnittpunkte der Geraden BQ und des Kreises sind die gesuchten Punkte P und P'. Deren Ortskurve ist die gesuchte Strophoide.

5.: $y = 2c$ einsetzen bringt:$2c(x^2+4c^2-a^2) = 2c(x^2+4c^2-ax)$. Es bleibt $a = x$, damit gibt es nur den einen in Top 3. überlegten Schnittpunkt. Die Annäherung außen ergibt sich geometrisch.

6.: $y = c$ einsetzen bringt: $c(x^2+c^2-a^2) = 2c(x^2+c^2-ax)$ und bald $-c^2 = (x-a)^2$. Das ist bei $c > 0$ für kein x erfüllbar.

7.: Was erhält man, wenn $A = (a, b)$ ist mit $b \neq 0$?
GeoGebra-Datei: afg3.5-stropho-waag.ggb