In: Kurven erkunden und verstehen
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

3.4.5 Geometrie aus der Polargleichung erfinden

Aufgabe 3.7 Im Umfeld der Cissoiden
Anregungen zum Erkunden mit diesen Erkenntnissen

1. Erzeugen Sie die Polarkurve $r(\theta) = a\tan(\theta)$.
2. Konstruieren Sie die Strophoide als Cissoide aus ihrer Polargleichung 3.10 $r = \frac{a}{\cos(\theta)} - a\ \tan(\theta)$.
3. Erzeugen Sie die Polarkurve für eine Pascal'sche Schnecke $r(\theta) = 2a\cos(\theta) - k$ in einer entschleunigten Art (siehe Abschnitt 2.3.3.2, und sehen Sie sich den Durchlauf an.
4. Konstruieren Sie eine Pascal'sche Schnecke mit Schlaufe als Cissoide.
5. Experimentieren Sie mit der kartesischen Gleichung 3.17 der Variations-Cissoide. Geben Sie freie Konstanten a und c und die Gleichung in GeoGebra ein und finden Sie alle *wesentlichen Formen*. Es sollten mindestens fünf sein, ein exakter Kreis ist dabei.

Hinweis
Zu 1. und 3.: Nehmen Sie z. B. das Werkzeug Kurve[....] aus Abschnitt 2.3.3.1
Zu 5.: Siehe Abb. 3.23 im Buch. Achten Sie darauf, dass Sie die Parameter *fein* einstellen können. Variieren Sie a bei festem c, aber auch c bei festem a. ◀

Lösung Es empfiehlt sich Abschnitt 3.4.5 zu lesen.

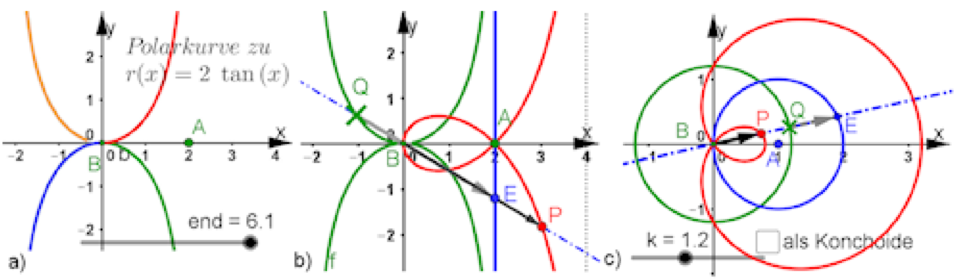

Abb. 3.9 Aufgabe 3.7 Umfeld der Cissoiden
a) Top 1., Polarkurve zum Tangens,
b) Top 2, Geometrie einer neuen Konstruktion der Strophoide durch Deutung der Polargleichung als Cissoide
c) Top 4., Geometrie einer neuen Konstruktion der Pascal'schen Schnecke mit Schlaufe durch Deutung der Polargleichung als Cissoide

Zu 1.: Gezeigt ist in Abb. 3.9 die in der Aufgabenstellung geforderte Polargleichung. Dass im x anstelle von θ steht, hat wohlüberlegte Gründe. 1. Sieht man beim Anzeigen den vertrauten Tangens. 2. Für eine polar-kartesische Darstellung, braucht man es genau so. 3. In den Kurvenbefehl muss man zweimal r eintragen, das sieht dann so aus:

`Kurve[r(t) cos(t), r(t) sin(t), t, 0, end]` , das ist mathematisch sauber und sicher.
GeoGebra-Datei polarkurve-tangens.ggb

In der Datei können Sie noch die implizite Kurve Kurve zuschalten. Versuchen Sie eine implizite kartesische Gleichung dafür herzuleiten.

Guter Rat: ***Zettel holen, selbst denken, schreiben rechnen, Zettel holen, selbst denken, schreiben, rechnen, Zettel holen, selbst denken, schreiben, rechnen!***

Es ist erstaunlich einfach: Mit den Grundgleichungen 2.6 folgt $\frac{y}{x} = \tan(t)$ und dann $x^2 = a\,y\cos(t)$ und $x = a\sin(t)$. Bald hat man $x^4 = y^2(a^2 - x^2)$. Das war's. Man sieht auch gleich die Symmetrien, die Asymptoten $x = \pm a$ und die breite Berührung der x-Achse, wie es Abb. 3.9 auch zeigt.

Zu 2.: Da der Subtrahend im blauen Kasten Seite 72 auf die Kurve C_1 und der Minuend auf Kurve C_2 verweist, folgt aus der Polargleichung 3.10 der Strophoide, dass die eben in Top 1. betrachtete Kurve das erzeugende Q tragen muss. Die blaue Gerade $x = a$ gibt E und den grauen Vektor $\overrightarrow{QE}$ her. So ist es in Abb. 3.9 b) gezeigt. Zur entsprechenden Deutung der Polargleichung 3.19 als Cissoide sehen Sie sich Abb. 3.25 Seite 71 im Buch an.

Zu 3.: Dieses ist mit dem Schalter **slow** in die Datei pol-kart-pascal-pkte.ggb eingebaut, siehe Aufgabe 3.2.

Zu 4.: Abb. 3.23 Seite 70 im Buch zeigt schon Vieles. Alle diese Cissoiden sind symmetrisch zur x-Achse. Sie haben die Nullstelle $x = c - 2a$. Und für $0 \leq c \leq 2a$ ist der Ursprung ein Punkt der Kurve. a verändert i.W. nur den Maßstab.
Die folgenden Werte für c gelten für $a = 2$.
Typ_1 ist mit $c < -0.5$ im II. Quadranten monoton wachsend.
Typ_2 hat mit $0.5 = c$ im II. Quadranten einen Sattelpunkt. Dort beginnt in der GeoGebra-Datei eine violette Kurve der Extrema, die im Ursprung endet. Sie ist mit Mathematica bestimmt worden.
Typ_3 ist mit $-0.5 < c < 0$ im II. Quadranten ein „Knauf".
Typ_4 ist mit $c = 0$ ein exakter Kreis. Denn $-xy^2 = (2a + x)x^2$ kann durch x dividiert werden, denn der Ursprung bleibt ein Kurvenpunkt, aber andere Punkte der y-Achse gehören geometrisch nicht zur Kurve. Es ist damit der Kreis um $(-a, 0)$ mit Radius a.
Typ_5 ist mit $0 < c < 4$ eine Schlaufe, mit der Trisektrix für $c = 1$ und der Strophoide für $c = 2$.
Typ_6 ist $c = 4$ die Cissoide des Diokles und hat eine Spitze im Ursprung.
Typ_7 ist für $4 < c$ im I.Quadranten monoton wachsend mit senkrechter Steigung.

afg3.7-cissoiden-vari.ggb