In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

4.1.3 Versiera und ihre Rotation um die x-Achse

Aufgabe 4.2 Der gemeinsame Schwimmgürtel-Torus

Wenn ich mir wünsche, dass *Sie* Kurven kreativ erkunden, bleibt es nicht aus, dass *ich* dieses auch getan habe. Die dabei entdeckte Besonderheit formuliere ich als Aufgabe. Dabei beziehe ich mich auf Abb. 4.3 (hier). Das Bild rechts neben den Körpern ist ein

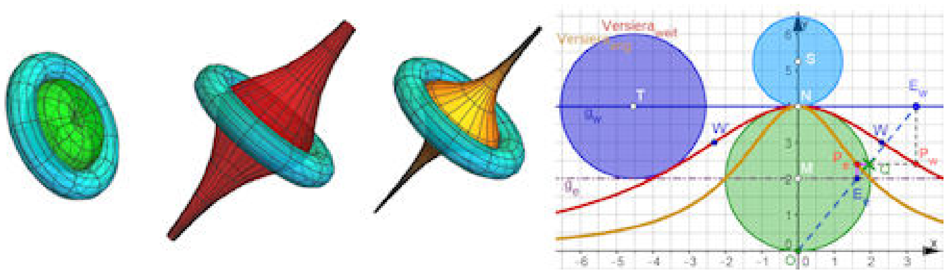

Abb. 4.3 Beide Versierae und ihre Tori, Wimmelbild zu Aufgabe 4.2

„Wimmelbild" – Sie kennen diesen Ausdruck vielleicht für die reichhaltigen Bilder für kleine Kinder vor dem Lesealter. Es sind dort der gemeinsame Erzeugungskreis (grün) und die Konstruktionen beider Versierae zu sehen. Der Kreis für den Torus in Abb. 4.5 (Buch) ist dunkelblau. Neu ist der hellblaue Kreis, der zu den hellblauen Tori in Abb. 4.3 links gehört.

1. Welchen Radius muss der hellblaue Kreis haben, damit der zugehörige Torus das Volumen $2\pi^2a^3$ hat?
2. Deuten Sie dieses Volumen in Bezug auf die weite bzw. die enge Rotations-Versiera.
3. Beziehen Sie den grünen Torus, der aus dem Erzeugungskreis entsteht, in Ihre Vergleiche mit ein.
4. Weisen Sie nach, dass N die Strecke $\overline{MS}$ im **goldenen Schnitt** teilt, dass also die Durchmesser des Schwimmringkreises und des Erzeugungskreises im **goldenen Verhältnis** stehen.

Hinweis

Für 1. muss gelten $2\pi^2a^3 = 2\pi^2(2a + r)r^2$. Diese Gleichung 3. Grades können Sie elementar nur dann lösen, wenn Sie bedenken, dass Sie eine Lösung, nämlich $r = -a$, schon kennen. Ein CAS führt auch direkt zum Ziel. Zur Sicherheit: die gesuchte Lösung ist $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. Dieses Ergebnis löst auch gleich Aufgabenteil 4. ◀

Lösung:

Zu 1. und 4.: Im Hinweis ist der Nach Formel 4.5 naheliegende Ansatz genannt, denn der Abstand des Mittelpunktes S von der x-Achse ist $(2a + r)$. Gekürzt und aufgelöst ergibt sich $r^3 + 2ar^2 - a^3 = 0$. Der grüne Torus aus Abb. 4.4 im Buch ergibt sich für $r = -a$.Darum geht die Polynomdivision durch $(r + a)$ ohne Rest auf und ergibt $r^2 + a\,r - a^3 = 0$. Die positive Lösung ist $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \approx 0.6183a = \varphi\,a$. N teilt die Strecke $\overline{MS}$ im **goldenen Schnitt** heißt mit $\overline{NM} = a$ nun die Behauptung $\frac{a}{a+r} = \frac{a}{a+\frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \ldots = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ nach kleiner Rechnung.

Zu 2. und 3.: Der gelbe Rotationskörper der engen Versiera mit hellblauem Schwimmring ist so groß wie der rote Rotationskörper der weiten Versiera. Dieser ist so groß wie die beiden aneinander geschmiegten, volumengleichen Tori in Abb. 4.3 (hier) ganz links. Wenn Ihnen das „komisch“ vorkommt, bedenken Sie, dass „außen“ kreisende Flächenelemente mehr Volumen erzeugen als dicht an der Achse befindliche gleichgroße Elemente.