In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

4.1.4 Allgemeine Versiera

Aufgabe 4.3 Erkundungen mit der allgemeinen Versiera
Versuchen Sie zunächst „auf eigene Faust“ für eine der Kurven in der Abbreffig:04allg-versiera-alle eine Gleichung direkt herzuleiten und Eigenschaften zu begründen. Dabei erschließt sich Ihnen der Beweis des vorigen Satzes. Am besten ist, Sie stellen **sich selbst** Fragen und Variationsaufgaben. Anregungen:

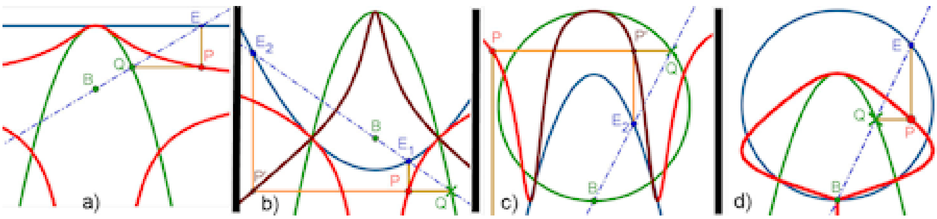

Abb. 4.4 Aufgabe 4.3 Allgemeine Versiera a)Parabel–Gerade, b) Parabel–Parabel, c) Kreis–Parabel, d) Tausch von C_1 und C_2 bei c), also Parabel–Kreis.

1. Leiten Sie unter Verwendung von Satz **??** für **??** a) bis c) Gleichungen her. Stellen Sie dazu entweder die Gleichungen der Parabeln konkret auf oder lassen Sie Lageparameter in Ihrer Rechnung.
2. Bauen sie die Konstruktionen in GeoGebra nach und prüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Eintragen der impliziten Gleichungen.
3. Versuchen Sie einige Eigenschaften der Ergebniskurven mit Hilfe der Gleichungen oder der Konstruktion zu begründen.
4. Der Fall d), bei dem C_1 die Parabel ist und C_2 der Kreis, ist ebenso leicht nachzubauen aber deutlich schwieriger zu rechnen.
5. Experimentieren Sie mit Parabeln in anderer Lage.
6. Experimentieren Sie mit zwei Kreisen, die Sie in Lage und Größe frei variieren können. Die Ortslinien der beiden sich ergebenden Schnittpunkte sind meist verschieden geformte geschlossene Kurven. In welchen Fällen sind diese Kurven kongruent?

Hinweis
Als Muster für die Vorgehensweise diene das Folgende: Für die Kreis-Parabel-Versiera in Abb. **??** c) könnte der Kreismittelpunkt $M = (0, a)$ sein, als Parabel kommt $y = k(x) = mx^2 - n$ infrage. Dann ergibt sich aus der vorletzten Zeile des obigen Satzes: $x^2 y = (mx^2 - n)^2(2a - y)$. Man sieht so allerlei: An den Nullstellen der Parabel berührt diese Kurve die x-Achse. Ist $y > 2a$ ist die Gleichung nicht erfüllbar. Die Gerade $y = 2a$ ist Asymptote, denn wenn Q an den „Nordpol“ des Kreises wandert, geht P nach außen und von unten immer dichter an diese Gerade heran. Da x nur quadratisch vorkommt, ist die Kurve symmetrisch zur y-Achse. ◀

Lösung: Zu 1., 2. und 3. B sei als Koordinatenursprung gewählt.

Zu a): Gleichung: Mit $y = f(x) = b - x^2$ und $y = k(x) = b$ folgt nach Satz 4.1 $y = b - \frac{x\,y}{b}$ und bald $y(b^2 + x^2 y) = b^3$.

Wegen des x^2-Terms ist die Kurve symmetrisch zur y-Achse, mit der sie genau den Punkt $(0, b)$ gemeinsam hat. Die x-Achse hat keine gemeinsamen Punkt mit der Kurve, denn $0(b^2 + x^2 \cdot 0) = b^2$ ist für kein x erfüllbar. Geometrisch rücken E und P beliebig nach außen, wenn Q an die x-Achse rückt. Darum ist die x-Achse wirklich Asymptote. Rückt Q dagegen an den Scheitel der Parabel, wird der zweite Schnittpunkt mit der Parabel beleibeig nach unten wandern, P und E also an die y-Achse rücken. Daher hist die negative y-Achse auch wirklich Asymptote.

Wer das als Grenzwert gerechnet sehen will, kann die Gleichung durch y^2 dividieren und $x^2 = \frac{b^3}{y^2} - \frac{b^2}{y}$ betrachten. Für $y \to 0$ muss auch x gegen 0 gehen.

Zu b): Gleichung: Nun sei f(x) wie oben, aber $y = k(x) = ax^2 - c$. Es folgt auf gleiche Weise $(b - y)(a\,x^2 + c)^2 = x^2 y^2$.

Wegen des x^2-Terms ist die Kurve symmetrisch zur y-Achse, mit der sie genau den Punkt $(0, b)$ gemeinsam hat. Die x-Achse hat genau für negative c zwei gemeinsame Punkte mit der Kurve, nämlich $\left(\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$.

Die Gerade $y = b$ hat mit der Kurve den Parabelscheitel von C_1 gemeinsam, denn $0 = x^2 b^2$ ist nur für $x = 0$ erfüllbar. Wenn Q an diesen Scheitel rückt, geht P' auch dahin, aber P wandert nach außen und beliebig dicht an $y = b$ heran. also sit diese Scheitelgerade eine Asyptote. Wieder ist die negative y-Achse Asymptote, Wie man beim Wandern von Q nach unten merkt. P' allerdings wandert dabei auf einer gekrümmten Bahn nach außen.

Zu c): Die Berechnung steht schon im Hinweis zur Aufgabe. Da Q den Kreis nicht verlässt und P die Ordinate erbt, befindet sich die Kurve in einem waagerechten Streifen von der Breite des Durchmessers. Eine senkrechte Asymptote gibt es also nicht, andere Überlegungen sind ähnlich wie eben.

Zu d): Das Rechnen ist unerquicklich. Aber bauen, hinsehen und Nachdenken lohnt. paragraphZu 5. und 6.: Nur selber machten erzeugt Kompetenz!!!!!! Bei den zwei Kreis können die beiden geschlossenen Kurvenäste nicht aus dem Rechtecke hinaus, das die Höhe des Durchmessers des ersten Kreises und die Breite des Durchmessers des zweiten Kreises Kreises hat. Kongruenz tritt (mindestens) auf, wenn der Pol B und der Mittelpunkt des zweiten Kreises zusammenfallen.

GeoGebra-Datei dazu: allg-versiera-kreis-kreis.ggb Die anderen GeoGebra-Dateien sind im Menü passend verlinkt.