In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

4.3.2 Bipolare Kurven mit beliebigen Gleichungen für r und r'

Aufgabe 4.4 Weitere bipolare Kurven

Am besten denken Sie sich selbst Gleichungen aus oder variieren das Bisherige. Einige Anregungen:

1. Sehen Sie sich wirklich die Bewegungen von P und P' bei Variation von Q in den Dateien zu den gezeigten bipolaren Kurven in gekoppelter Darstellung an.
2. Untersuchen Sie die **Descartes'schen Ovale** aus der Definition 4.3 S. 100 in der gekoppelten Darstellung. Welche Typen gibt es?
3. Was wird aus $r' = 0.2\tan(r) + r$? Der **Tangens** schneidet den fraglichen Bereich ja unendlich oft. Der Summand r bewirkt, dass die typische S-Welle des Tangens im Gültigkeitsbereich bleibt.
4. Was wird aus $r' = 5.5\sin(r) + r$?
5. Experimentieren Sie mit **Parabeln**.

Hinweis

Sie brauchen nur in den GeoGebra-Dateien den Eintrag für die Kurvengleichung zu ändern. Geben Sie Funktionen mit $y = term(x)$ ein oder nehmen Sie für Funktionen eine andere Datei als für Gleichungen. Achten Sie darauf, dass Ihre Kurve im erlaubten Bereich auch wirklich Punkte hat. ◀

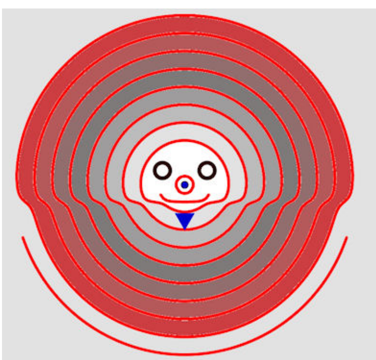

Abb. 4.5 **Aufgabe 4.4 Top 3. Schräger Tangens**

Lösung: Zu 1.: Wenn Ihnen die Datei zu Bild 4.19 (Buch) zu aufwändig ist, dann nehmen Sie die zu den Descartes'schen Ovalen in Top 2. Aber: Beobachten können Sie nur selbst!

Zu 2.: Descartes'sche Ovale, auch etwas missverständlich „kartesische Ovale" genannt, erfüllen eine Gleichung der Bauart $m\,r \pm n\,r' = k$. Dabei gibt es zwei Brennpunkte

$E = (e, 0)$ und $E' = (-e, 0)$ im Abstand $2e$. Diese Festlegungen der Brennpunkte sind „o. B. d. A.“, sie schränken die Allgemeinheit nicht ein, machen Sie sich das klar. Es erfüllen also r und r' für jedes Descartes'sche Oval eine lineare Gleichung. Damit ist schon klar, dass Ellipsen und Hyperbeln für $m = 1$, $n = 1$ und $k = \pm 2a$ spezielle solche Ovale sind.

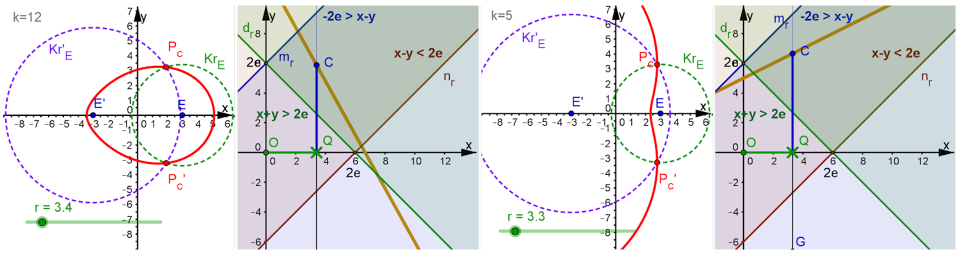

Abb. 4.6 **Aufgabe 4.4 Descartes'sche Ovale gekoppelt** Diese Darstellung ist im Buch auf Seite 105 in Abb. 4.19 und 4.20 erklärt. Sonstiges steht im Text.

Die lineare Gleichung erzeugt die ockerfarbene Gerade, die nur für Punkte in dem dunkelgrünen Bereich Kurvenpunkte erzeugt. Damit ergeben sich aus diesen Bildern zwei Typen: geschlossene eiförmige Kurven und geschlossene Kurven mit Delle. Letzteres sieht man hier nicht, aber die Gerade verlässt sicher weiter rechts den Gültigkeitsbereich, daher kann sie nicht bis ins Unendliche reichen.

Betrachten wir aber den Fall, dass die Gerade die Steigung 1 hat, so ergibt sich eine **Hyperbel**, wenn $|k| < 2e$ ist. Bei Ellipsen ist dagegen die Steigung -1 und $k > 2e$.

Wenn man die Gleichung der Kurve aufstellen will, braucht man die beiden Kreise $Kr_E: \quad (x-e)^2 + y^2 = r^2$ und $Kr'_E: \quad (x+e)^2 + y^2 = a^2$, der Deutlichkeit halber ist a:=r' geschrieben. Dazu tritt die Bedingung $DES: \quad m\,r + n\,a = k$. Wir denken später über die Minus-Fälle nach. Elimination von a und r ergibt mit Mathematica, wenn man etwas elegant sortiert,
$k^4 + (-2e(m^2+n^2)x + (m^2-n^2)(e^2+x^2+y^2))^2 - 2k^2(-2e(m^2-n^2)x + (m^2+n^2)(e^2+x^2+y^2)) = 0$
Mit Copy as plaintext kann man das in GeoGebra übernehmen, wobei man vorher!!!! e, $k\,m\,n$ als Schieberegler definieren muss. Damit kann man weiter erkunden, wie die Abbildung zeigt.

Ein Minuszeichen bei n oder bei k müsste die Wirkung von negativen n bzw. k haben. Da beide aber nur in gerade Potenz in der Gleichung vorkommen, ist es nicht nötig, noch einen „Minus-Ansatz“ zu rechnen.

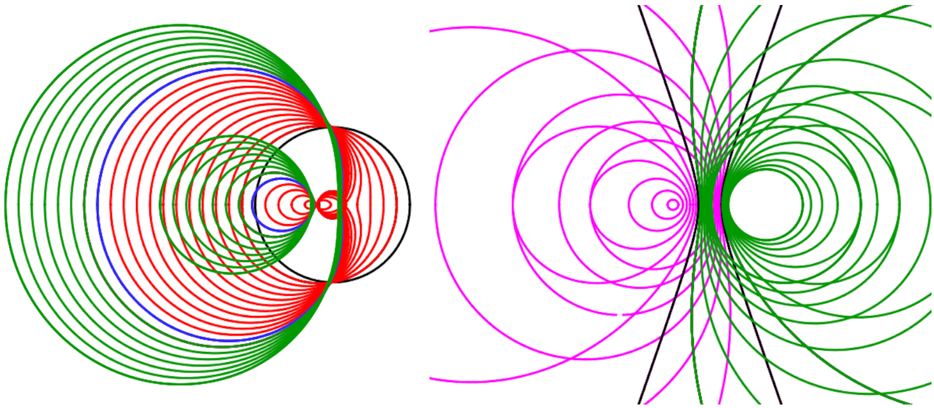

Abb. 4.7 Aufgabe 4.4 Descartes'sche Ovale
Linkes Bild: $k = 2$, $m = 0.7$, $n = 1$ und e variiert von 0 (schwarz), dann rot, über $e = 2.4$ (blau), dann grün bis $e = 3.8$.
Rechtes Bild: $e = 3$, $k = 2$, $n = 1$ und m variiert von 0.1 bis 1 violett und dann bis 1.8 in rot.

Zu 3.: Abb. 4.8 (hier) Schräger Tangens

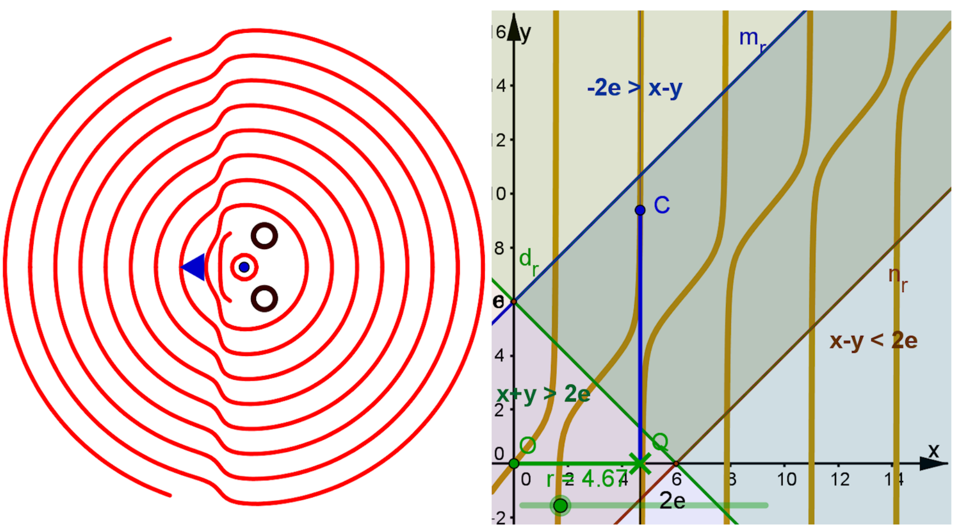

Abb. 4.8 Aufgabe 4.4 Top 3. Schräger Tangens

Rechts sieht man, dass die Äste der Tangenskurve stets den Gültigkeitsstreifen verlassen. Daher besteht die Kurve nur aus „Inseln". Der Strich, der wie ein Mund aussieht, ist ein Artefakt. Bei feiner Einstellung für r gehört er auch zu einer geschlossenen Kurve. Es gab auch keinen geometrischen Grund für die Enden des Striches.
Machen Sie sich klar: Erreicht C die blaue Gerade m_r (oben) $-2e = x - y$ so entsteht ein Punkt auf der x-Achse rechts vom rechten Brennpunkt E. Die untere Gerade n_r gehört zu Punkten $(x_0, 0)$ mit $x_0 < -2e$, die grüne Gerade d_r gehört zu Punkten auf der x-Achse zwischen den Brennpunkten. Vergleichen Sie dies nochmals mit den Geraden

parallel zu den Bereichskanten, die zu Ellipsen und Hyperbeln und Hyperbeln führen (siehe Text zu Top 2.).

Zu 4.:Abb. 4.9 (hier) Schräger Sinus

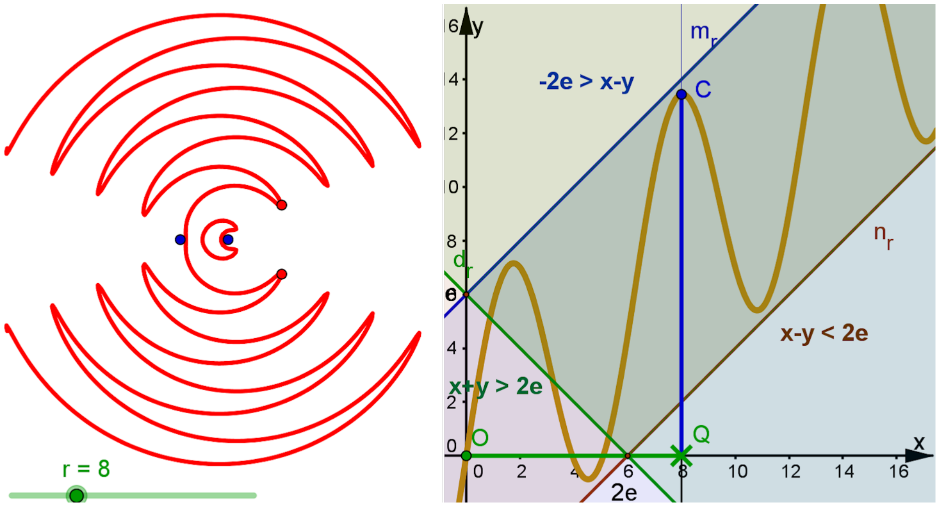

Abb. 4.9 **Aufgabe 4.4 Top 4. Schräger Sinus**

Rechts sieht man, dass die Sinuskurve außen stets im Gültigkeitsstreifen bleibt, anfangs tritt sie noch einmal heraus. Daher hat die Kurve links innen eine kleine „Insel“, sonst ergibt sich eine zusammenhängende Kurve. Für kleine k verschwindet die Insel, für große k gibt es nur noch Inseln. Finden Sie selbst heraus, wann das eine bzw. das andere passiert.

Zu 5.: Wenn Sie die Parabeln als $f(x) = k(x-m)^2 + n$ realisieren, können Sie auch hierfür die Hauptdatei dieser Aufgabe verwenden. Je nachdem wie oft Ihre Parabel den Gültigkeitsbereich schneidet bekommen Sie zwei ineinander liegende Inseln, Vanillekipferl, einzelne Übergangsformen, isoliert Punkte oder gar keine Kurve.