In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

4.4 Lemniskaten und andere Gelenkkonstruktionen

4.4.1 Bernoulli'sche Lemniskate

Aufgabe 4.5 Lemniskaten-Eigenschaften

Diese Aufgabe bezieht sich auf das Wimmmelbild Abb. 4.25 (Buch), die hier als bezeichnete Abb. 4.10 am Beginn der Lösung steht. Beachten Sie auch die vorigen Bilder zur Lemniskate im Buch.

1. Die Urspungstangenten der Lemniskate schneiden den Kreis durch die Brennpunkte. Welche Koordinaten haben die Schnittpunkte?
2. Im Wimmelbild sind diese Punkte verbunden. Welcher Bezug besteht zu Abb. 4.22 a)
3. Im Wimmelbild schneidet diese Verbindungsstrecke den Krümmungskreis. In Abb. 4.10 (hier unten) ist alles größer zu sehen. Ist dieser Schnittpunkt B_1 wirklich Berührpunkt für die Seite des gleichseitigen Dreiecks aus dem Ursprung und den Extrema?
4. Was bedeutet der Pfeil in Abb. 4.24 b)?
5. Kann man diese Zusammenhänge zur Konstruktion des Krümmungskreises verwenden?
6. Die Krümmungskreise der Extrema schneiden im Wimmelbild die x-Achse. Haben diese Schnittpunkte eine besondere Lage?
7. Rechts von den Extrema in der rechten Schlaufe stimmt der Krümmungskreis ziemlich gut mit der Lemniskate überein. Wie groß ist der Ordinatenunterschied von Extrempunkt und Kreispunkt?
8. Wie groß ist der Flächenunterschied rechts von der Gerade durch die Extrema?
9. Auch die Lemniskate lässt sich nach [Lockwood 1961, S. 116] als Cissoide auffassen. Die Kurve C_1 ist der Kreis um E mit dem Radius $\frac{e}{\sqrt{2}}$ und C_2 ist derselbe Kreis. D. h. der Fahrstrahl schneidet den Kreis in Q und D. (E ist hier als Name vergeben.) Bauen Sie in GeoGebra eine entsprechende Konstruktion für die Lemniskate.

Hinweis

Verwenden Sie die in den vorigen Absätzen hergeleiteten Ergebnisse und setzen Sie auch GeoGebra und CAS ein. Die Grunddateien sowie Ergebnisse finden Sie wie immer auf der Website zum Buch. ◀

Lösung: Von Seite 108 bis 112 sind im Buch schon viele Eigenschaften hergeleitet. Der didaktische Sinn eines solchen Wimmelbildes ist aber, sich in eigener Regie den dargestellten Eigenschaften zu widmen. Es ist auch gut denkbar, dass man gar keine Fragen explizit stellt.

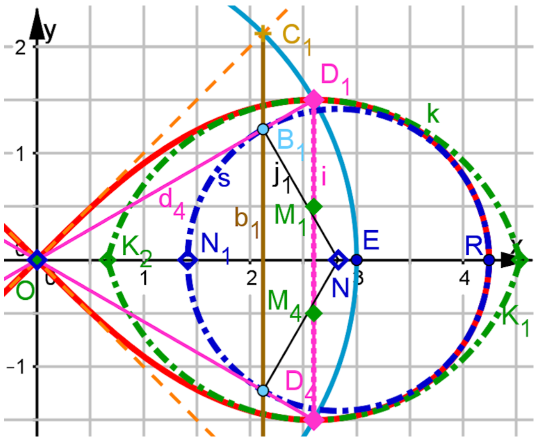

Abb. 4.10 Lemniskate: Wimmelbild zu den Eigenschaften und ihren Bezügen, siehe Aufgabe 4.5

Zu 1. und 2.: Der Polarwinkel im Ursprung ist 45^o, aus der Polargleichung 4.23 und Gleichung 4.25. Der Kreis um O durch E ist $x^2 + y^2 = e^2$. Das hat mit $y = x$ für die Tangente $x_c = y_c = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,e$ für Schnittpunkt C_1 zur Folge. Diese Längen sind als halbe Diagonalen eines Quadrates mit der Kantenlänge e zu interpretieren. Dies ist in Abb. 4.22 a) S. 109 im Buch zu sehen.

Zu 3.: Für den blauen Krümmungskreis s im rechten Scheitel sind in Abschnitt 4.4.1.4 drei Bestimmungsarten vorgestellt. Jedenfalls ist sein Mittelpunkt $N = (\frac{2}{3}\sqrt{2}\,e,\ 0)$ und der Krümmungsradius ϱ_s ist die Hälfte dieser Abszisse. Der Ansatz für den gesuchten Schnittpunkt ist daher $(x - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,e)^2 + y^2 = \frac{2}{9}\,e^2$ und $x = x_c = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,e$. Sofort folgt $y = \frac{e}{\sqrt{6}}$ als Ordinate von B_1. Damit hat die Gerade OB_1 die Steigung $\frac{\frac{e}{\sqrt{6}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,e} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^o$. Damit liegt B_1 auf der violetten Geraden OD_1. Diese Lage des Extremums D_1 ist in Abschnitt 4.4.1.1 abgesichert und in Abb. 4.22 b) im Buch dargestellt.

Zu 4. und 5.: Der Pfeil in Abb. 4.24 b) im Buch zeigt, dass man B_1 nun auch als Schnittpunkt von C_1C_4 und OD_1 auffassen kann und von dort mit der Senkrechten auf OD_1 nun N konstruieren kann. Es passt alles schön zusammen. N ist ja auch die äußere Drittelstelle der Halbachse.

Zu 6.: Die Krümmungskreise in den Extrema wurden im Buch in Abschnitt 4.4.1.3 berechnet. Der Krümmungsradius ist $\varrho = \frac{2}{3}e$. Da e auch der Abstand der Extrema ist, wie es Abb. 4.22 b) mit den gleichseitigen Dreiecken zeigt, braucht man diesen nur zu dritteln, um die Mittelpunkte der Extremum-Krümmungskreise zu erhalten. Die Gleichung des oberen ist $(x - \frac{\sqrt{3}}{2}e)^2 + (y + \frac{e}{6})^2 = \frac{4}{9}\,e^2$, er schneidet die x-Achse in $x = \frac{\sqrt{3}e}{2} \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}e$. Dazu fällt mir nichts Besonderes ein.

Zu 7. und 8: Der blaue Scheitelkrümmungskreis hat an der Stelle $\frac{\sqrt{3}}{2}e$ die Lösung von $(\frac{\sqrt{3}}{2}e - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,e)^2 + y^2 = \frac{2}{9}\,e^2$ als Ordinate. Das ist kein übersichtlicher Term. Es ist sowieso sinnvoll, hier $e = 3$, wie im Bild, festzulegen und numerisch zu arbeiten. An der Polargleichung sieht man deutlich, dass es bis auf Streckungen nur eine einzige Bernoulli'sche Lemniskate gibt. Darum sind nur Längenverhältnisse und Flächenverhältnisse interessant. Im Folgenden kommt GeoGebra mit CAS und numerischer Analysis zum Einsatz.

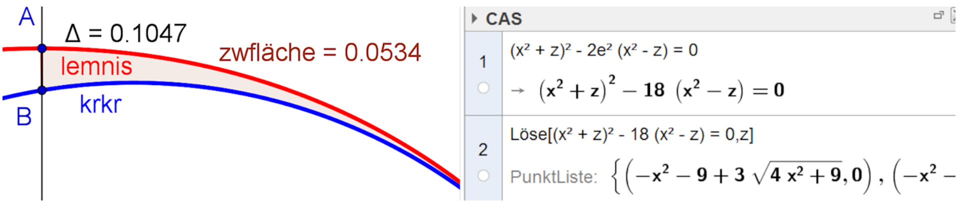

Abb. 4.11 Aufgabe 4.5 Top 6. und 7.:Lemniskate und Scheitelkrümmungskreis

Das ist Abb. 4.11 gezeigt. Die Lemniskatengleichung ist biquadratisch in y, man kann auch von Hand auflösen und erhält $f(x) = \sqrt{-x^2 - 9 + 3\sqrt{4x^2 + 9}}$. Für den Kreis nimmt man in diesem Bereich $g(x) = \sqrt{2 - (x - 2\sqrt{2})^2}$. Mit `Extremum[f]` bekommt man Punkt A, dann B mit der senkrechten Geraden und dem Schnittwerkzeug. Der in Top 6. gefragte Unterschied ist $\Delta = 0.1047$, also 7 Prozent der Verkürzung der Lemniskaten-Ordinate. Die Zwischenfläche ist mit `Integral[f,g,x(A),x(R)]` zu haben und ergibt sich zu 0.0534, also 1.2 Prozent der Viertelfläche der Lemniskate.
Für eine Zeichnung der Lemniskate von Hand ist dieser Scheitelkrümmungskreis zusammen mit dem Tangentenkreuz im Ursprung also sehr nützlich.

Zu 9.: Die Cissoiden-Konstruktion der Lemniskate von Lockwood ist verblüffend einfach und für junge Lernende gut geeignet.

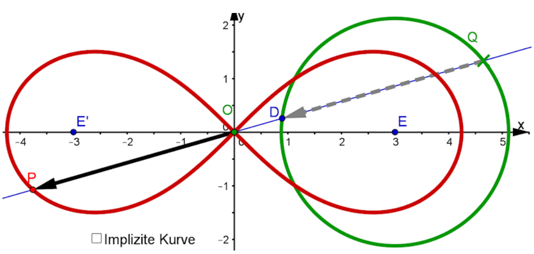

Abb. 4.12 Aufgabe 4.5 Top 6. und 7.:Lemniskate und Scheitelkrümmungsreis