In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

4.4.1.5 Andere Darstellungen der Lemniskate

Aufgabe 4.6 Parameterdarstellungen der Lemniskate

Es kann sehr verschiedene Parameterdarstellungen derselben Kurve geben. Zumeist sind sie in der Form $x = x(t), \quad y = y(t)$ gegeben. Verwenden Sie im Folgenden die Standardrealisierung in GeoGebra aus dem Werkzeugkasten Abschnitt 2.4.

1. Bauen Sie eine GeoGebra-Datei zu der zweiten Parameterdarstellung aus Gleichung 4.29 Beachten Sie, dass hier die Lemniskate „in eins" durchlaufen wird. Die Stückelung, die bei Gleichung 2.28 nötig wird, entfällt.
2. Ist auch $x = x(t) = a\frac{\cos(t)}{1+\sin(t)^2}, \quad y = y(t) = a\frac{\cos(t)}{1+\sin(t)^2} sin(t)$ eine Parameterdarstellung der Bernoulli'schen Lemniskate?
3. Ist auch $x = x(t) = \sqrt{2}e\sin(t), \quad y = y(t) = \frac{e}{2}sin(2t)$ eine Parameterdarstellung der Bernoulli'schen Lemniskate?

Lösung: Wie hinter dem blauen Kasten mit Gleichung 4.29 und auch in Abb. 4.27 (Buch) erklärt ist Definieren wie für das zweite Grafikfenster die Funktionen $fx(x) = \frac{a(1-x^4}{1+6x^2+x^4}$ und $fy(x) = \frac{2ax(1-x^2}{1+6x^2+x^4}$. Die Rechtsachse ist mit dem Parameter t beschriftet, der im Buch s heißt.

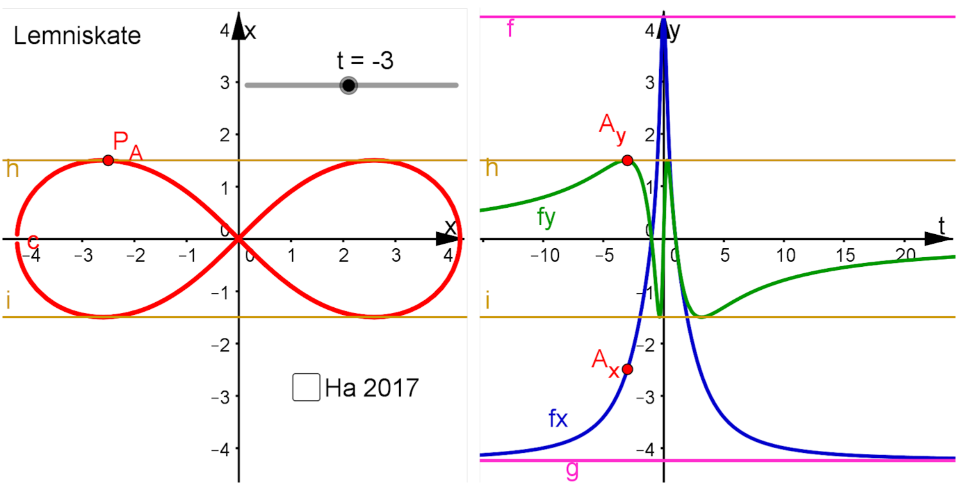

Abb. 4.13 Aufgabe 4.6 Lemniskate in rationaler Parametrisierung, Darstellung mit zwei gekoppelten Grafikfenstern

Es ist zu beobachten, dass der linke Scheitelpunkt $(-a, 0)$ mit endlichen t gar nicht erreicht wird. Sieht man sich den Durchlauf von P durch die Kurve an, ohne das 2.Grafikfenster zu kennen, hat man große Mühe, P überhaupt in die rechte Hälfte der Lemniskate zu bekommen. $t = 0$ gehört zum rechten Scheitel $(a, 0)$, $t = 1$ bildet schon den Doppelpunkt, dann wandert mit wachsendem $|t|$ Punkt P immer langsamen, im Bild bis ± 100. Mit Blick auf das rechte Grafikfenster aber kann man dieses Verhalten gut verstehen.

Wer möchte, kann seine Vertrautheit mit gebrochen rationalen Funktionen testen. Für fx ist die Asymptote $y = -a$ augenfällig, senkrechte Asymptoten (Pole) kommen wegen des echt positiven Nenners nicht vor, als gerade Funktion muss es für $t = 0$ ein Maximum geben. Dagegen strebt fy außen gegen die x-Achse, ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat vier Extrema, die den vier Extrema der Lemniskate entsprechen. Wir wissen schon dass deren Ordinaten $\pm\frac{e}{2}$ sind. Sehen Sie sich an, wann A_x und A_y in dem selben Quadranten liegen und wann in verschiedenen.

Zu 2.: Realisierung in GeoGebra zeigt, dass die als implizite Gleichung eingegebene Lemniskate auf dieser Parameterkurve liegt. Strenge Gewissheit erlangt man in dem man t eliminiert. Das geht von Hand, wenn man die Schreiberei durch $c = \cos(t),\ s = \sin(t)$ vereinfacht und an einer Stelle $1 - s^2 = c^2$ beachtet. Man bildet $(x^2 + y^2)^2$ und $a^2(x^2 - y^2)$ und erhält dasselbe.

Zu 3.: Versucht man auch erst einmal in GeoGebra zu zeichnen, so ist sofort die sichere Antwort da: Die Kurven liegen nicht genau aufeinander, es sind verschiedene Kurven, obwohl auch eine Lemniskate mit denselben Gesamtabmessungen vorliegt. Wenn man stattdessen rechnen will, so bietet sich die Steigung im Ursprung an: $m(t) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{e\ \cos(2t)}{\sqrt{2}e\ \cos(t)}$ und damit $m(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und das ist nicht Steigung 1, wie bei der Bernoulli'schen Lemniskate. Ist es die Gerono'sche Lemniskate aus Abschnitt 4.4.2.1?

GeoGebra-Dateien finden Sie auf de Website im Bereich 04 Barock-> Lemniskate