In: **Kurven erkunden und verstehen**
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

4.4.2 Noch mehr Lemniskaten

Aufgabe 4.7 Booth'sche Ovale und Booth'sche Lemniskaten
Lesen Sie die Einleitung und die Gleichungen im Buch auf Seite 116.

1. Sehen Sie sich die Booth'schen Ovale und Lemniskaten in GeoGebra an. Für welche Verhältnisse von c und s ergeben sich welche Formen?
2. Wann und bei welchem Typ kommen Doppelkreise zustande?
3. Zeigen Sie, dass für $c^2 > 2s^2$ das Oval eine Delle hat und für $c^2 \leq 2s^2$ nicht. Legen Sie dazu eine waagerechte Gerade durch den Scheitel.
4. Welche der Booth'schen Lemniskaten ist eine Bernoulli'sche Lemniskate?
5. Bestimmen Sie die Halbachsen der Booth'schen Ovale.
6. Bestimmen Sie k und e für Cassini'sche Kurven (Gleichung **??** und Abschnitt **??**) so, dass die Halbachsen mit den eben berechneten übereinstimmen. Sehen Sie sich in GeoGebra die Cassini'schen Kurven und die Booth'schen Ovale mit den so berechneten gleichen Halbachsen an.
7. Setzen Sie einen zugfesten Punkt auf das Booth'sche Oval, und testen Sie, ob die für die Cassini'schen Kurven geltende Produktgleichheit für die Abstände von den Brennpunkten erfüllt ist. $E = (e, 0)$ haben Sie aus der vorigen Nummer, beachten Sie auch den Hinweis.

Hinweis
Für gleiche Abmessungen gilt: $k^2 = \frac{1}{2}(c^2 + s^2)$ und $e^2 = \frac{1}{2}(c^2 - s^2)$. ◀

Lösung:

Zu beiden Booth'schen Typen: Wegen der ausschließlich geraden Potenzen sind alle Kurven **zu beiden Achsen symmetrisch**. Zudem reicht es, nichtnegative Parameter c und s zu betrachten. Wenn im Folgenden der Begiff „**Scheitel**" verwendet wird, so seien die Scheitel auf den Achsen gemeint. Die Extrema sind auch Scheitel in dem Sinne, dass sie lokale Krümmungsminima sind. Wie nennen Sie hier zutreffend „Extrema". Beachten Sie, dass eine schräg im Koordinaten System liegende Parabel weiter ihren Scheitel hat, der dann aber kein Extremum ist, sondern nur Krümmungsminimum. Schräge Lagen der Booth'schen Kurven betrachten wir aber nicht.

Aus den kartesischen Gleichungen 4.31 ergibt sich mit den Grundgleichungen 2.6 sofort $\left(r^2\right)^2 = c^2 r^2 \cos^2\theta \pm s^2 r^2 \sin^2\theta$. Durch r^2 darf man nur für $r \neq 0$ dividieren. Bei den Ovalen „verliert" man, wenn man es dennoch tut, die Lösung $r = 0$. Die kartesischen Booth'schen Kurvengleichungen 4.31 – von denen wir hier ja ausgehen wollen – werden alle vom Ursprung zu einer wahren Aussage gemacht. Für die Ovale ist er i.A. ein **isolierter Punkt**. Ausnahmen sind die Doppelkreisfälle, siehe Top 2.

Für die Lemniskaten folgt aus $r = 0$ nun $\frac{c}{s} = \pm\tan(\theta)$ und man kann den Tangens des Tangentenwinkels im Ursprung ablesen. Machen Sie sich klar, dass dieser zu den Situationen in Abb. 4.14 und Abb. 4.15 passt.

Zu 5., Schnittstellen mit den Achsen: An den Schnittstellen mit der x-Achse ist $y = 0$, also $x^4 = c^2x^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm c$ für Ovale und Lemniskaten. An den Schnittstellen mit der y-Achse ist $x = 0$, also $y^4 = s^2y^2 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = \pm s$ für Ovale, aber Lemniskaten schneiden die y-Achse ausschließlich bei $y = 0$.

Zu Top 1. und 4., Formen: Die **Lemniskaten** sehen alle aus, wie man sich Lemniskaten vorstellt. Abb. 4.14 und Abb. 4.15 zeigen die Entwicklung in Rot aus dem Ursprung heraus bei festem $s = 2$ für wachsende c. Von flachen Achten werden sie immer bauchiger, $s = c$ ergibt die Bernoulli'sche Lemniskate mit $c^2 = 2e^2$, wie man an Gleichung 4.22 sieht, abgebildet als letztes Bild von 4.14. Wächst c weiter, wird die Lemniskate größer und ihre Ursprungstangenten werden immer steiler.

Die **Ovale** (violett) zeigen eine größere Vielfalt: einfache Ovale und eingebuchtete Formen, beides sowohl aufrecht als auch liegend. Probiert man mit den Schiebereglern c und s herum, stellt sich keine schnell durchschaubare Übersicht ein. Die Abb. 4.14 und Abb. 4.15 geben mit den gezeigten Streifen eine Hilfestellung zum Verstehen.

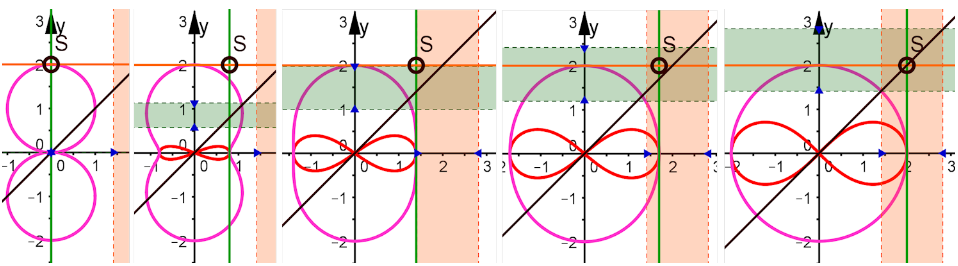

Abb. 4.14 Aufgabe 4.7 Booth'sche Ovale) (violett und Lemniskaten (rot), Teil a)

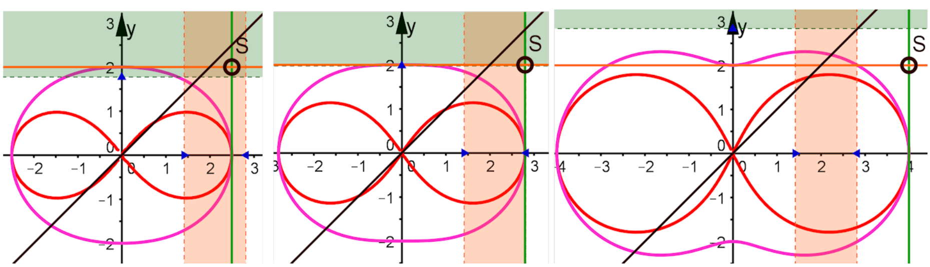

Abb. 4.15 Aufgabe 4.7 Booth'sche Ovale) (violett und Lemniskaten (rot), Teil b)

Zu Top 2. Ein Parameter sei 0: Für $c = 0$, $s \neq 0$ folgt $x^2 + y^2 = \pm sy$ bei den Ovalen, das ist Doppelkreis wie eine Acht mit dem Zentrum im Ursprung und den beiden Durchmessern s. Bei dem Lemniskaten kommt nur der Ursprung selbst zustande.

Für $s = 0$, $c \neq 0$ folgt $x^2 + y^2 = \pm cx$ das ist bei beiden Typen Doppelkreis wie eine liegende Acht mit dem Zentrum im Ursprung und den beiden Durchmessern c.

Zu 3., Grundidee für die Einbuchtungen Um die Parameterkonstellation zu finden, bei der die Einbuchtungen anfangen, wird die Gerade $y = s$ durch den oberen Scheitel gelegt Wenn sie weitere Schnittpunkte mit dem Oval hat, ist dieses oben (und unten) eingebuchtet. Ansatz: $(x^2+s^2)^2 = c^2x^2+s^4 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-\left(c^2-2s^2\right)\right)=0$. Diese Gleichung hat als doppelte Nullstelle $x=0$, die Berührung mit der waagerechten Geraden. Für weitere Lösungen, also für eine Delle oben und unten, muss die Wurzel existieren, also muss $c^2 > 2s^2$ gelten.

Ebenso erhält man mit der Senkrechten Gerade $x = c$ die Existenz eine Delle rechts und links $s^2 > 2c^2$.

Der grüne Steifen markiert den Bereich $\frac{c}{\sqrt{2}} < s < \sqrt{2}c$. Wenn der obere Scheitel $(0, s)$ **in** ihm liegt gibt es kein Delle im Booth'schen Oval.

Der orangefarbene Steifen markiert den Bereich $\frac{s}{\sqrt{2}} < c < \sqrt{2}s$. Wenn der rechte Scheitel $(c, 0)$ **in** ihm liegt gibt es kein Delle im Booth'schen Oval.

In den Abb. 4.14 und Abb. 4.15 ist $s = 2$ konstant und damit der Scheitel $(0, s)$ ortsfest. Das gilt auch für den orangefarbenen Streifen. Der grüne Streifen wird mit wachsendem c breiter, wandert nach oben und der Scheitel $(c, 0)$ wandert durch den senkrechten Streifen hindurch.

Die Lage des Punktes $S = (c, s)$ **fasst alles zusammen**: Ist S im weißen Bereich, gibt es entweder oben/unten oder rechts/links Dellen. Anderenfalls ist S im Überschneidungsbereich der Streifen: Für S **auf** der Winkelhalbierenden $y = x$ ist das Oval speziell ein Kreis und die Lemniskate vom Bernoulli-Typ. Ist S dort oberhalb der schwarzen Geraden, ist das Oval aufrecht und die Steigung m der Ursprungstangenten erfüllt $|m| > 1$. Ist S dort unterhalb der schwarzen Geraden, ist das Oval liegend und die Steigung m der Ursprungstangenten erfüllt $|m| < 1$.

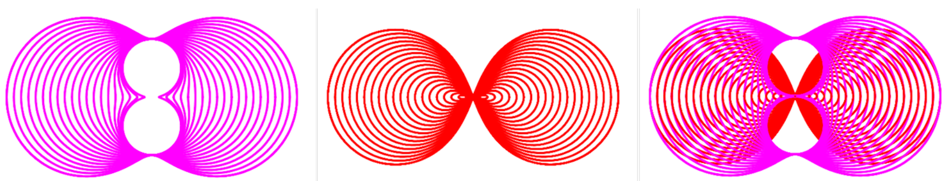

Abb. 4.16 Aufgabe 4.7 Booth'sche Ovale) (violett) und Lemniskaten (rot) bei festem s

Zu 7. und 8. Vergleich mit den Cassini'schen Kurven Da auch bei den Cassini'schen Kurven Ovale vorkommen, ist ein Vergleich interessant. Sinnvoll sind erst einmal gleiche Abmessungen. Die im Hinweis gegebenen Gleichungen sind die Lösungen des Gleichungssystems $s^2 = k^2 - e^2, \quad c^2 = e^2 \pm k^2$, das man aus Abschnitt 4.3.1.2 und den obigen Achsenschnittstellen sofort erhält. Mit diesen Werten für k und e kann man in **eine** Darstellung beide Kurven eintragen. Für beliebig gewählte s und c haben die Kurven gleiche Scheitel, aber verschiedenen Kurvenverlauf. Man kann mit Sicherheit sagen: I. A. sind Booth'sche Kurven und Cassinische Kurven verschieden. Dieses ergibt sich auch bei Prüfung des Abstandsproduktes eine Booth-Punktes von $(\pm e, 0)$.

Übereinstimmende Sonderfälle sind noch überlegenswert:
Für $s = c$ hat man $k = c$ und $e = 0$ und damit bei beiden Ovalen den Kreis $x^2 + y^2 = c^2$, für die Booth'schen Lemniskaten aber die Bernoulli'sche Lemniskate.

Für $s = 0$ wird die Bernoulli'sche Lemniskate von Cassini von dem liegenden Doppelkreis der Booth'schen Kurve umschlossen.
Für $c = 0$ gibt es nur die aufrechte Acht von Booth, wegen $2e^2 = -s^2$ kommt keine Cassini'sche Kurve zustande.

Zusatz Polardarstellung der Booth'schen Kurven Hierzu steht schon etwas oben in der Einleitung zur Lösung. Ergänzen kann man, dass für die Ovale mit ihrem isolierten Punkt $(0,0)$ weitere Lösungen für $r = 0$ nicht zustande kommen, da dann $\frac{c^2}{s^2} = -\tan(\theta)^2$ gelten müsste. Das Minuszeichen verschwindet nur bei den Lemniskaten.

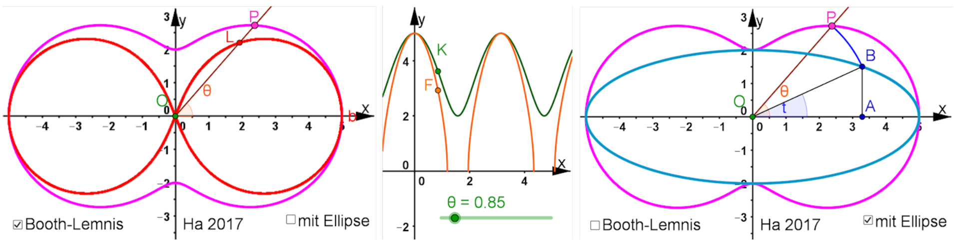

Abb. 4.17 Aufgabe 4.7 a) und b): Booth'sche Kurven polar-kartesisch
c) mit eingebetteter Ellipse

Die polar-kartesische Darstellung zeigt deutlich, dass die Ovale mit ausschließlich positiven Polarradien problemlos durchlaufen werden, dass aber die Booth'schen Lemniskaten ebenso „Aussetzer" haben wie es in Abschnitt 4.4.1.5 für die Bernoullische Lemniskate gezeigt ist. Auch hier beginnt der Durchlauf mit $\theta = 0$ im rechten Scheitel, geht durch den I. Quadranten, dann „Pause", dann in den II. Quadranten u.s.w. Von Hand würde niemand eine Lemniskate so zeichnen!

Eingebettete Ellipse Die Parameterdarstellung der Ellipse aus Gleichung 4.8 Seite 90 ist sehr „griffig" und man könnte auf die Idee kommen $x = c\cos(\varphi)$ und $y = s\sin(\varphi)$ durch Quadrieren und Addieren auf $x^2 + y^2 = r^2 = c^2\cos(\varphi)2 + s^2\sin(\varphi)^2$ zu bringen. Nanu? Das ist doch Gleichung 4.2 Seite 116 für die Ovale, nur φ statt θ!?! Abb. 4.17 c) zeigt deutlich, dass θ nicht der Polarwinkel von B ist, ϕ ist es auch nicht (das steht auf Seite 90 im Buch), sondern das eingezeichnete t. Die Polarradien von B und P stimmen aber überein, dieses zeigt das Kreisbogenstück von BB nach P.

Zusatz-Aufgabe, also eine Aufgaben-Babuschka: Entwickeln Sie aus diesem Zusammenhang mit der Scheitelkreiskonstruktion Abb. 4.9 auf Seite 90 im Buch eine **geometrische Konstruktion der Booth'schen Ovale**.

Dateien zu allen Teilen finden Sie auf der Website bei 09 Barock -> Gelenke.