In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

4.4.2.1 Lemniskate von Gerono

Aufgabe 4.8 Andere Konstruktionen für die Gerono'sche Lemniskate

Zu den drei Erzeugungsweisen in Abb. 4.18 gesellt sich noch die Darstellung als Lissajous-Kurve, siehe Abschnitt 8.2.

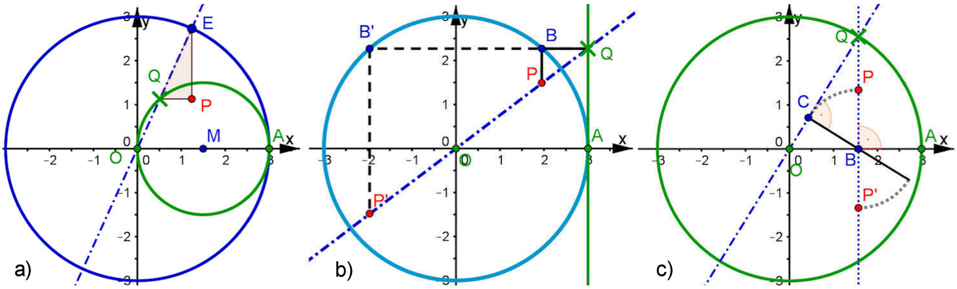

Abb. 4.18 Gerono'sche Lemniskate in drei Konstruktionen: a) Gerono'sche Lemniskate als allgemeine Versiera nach Definition 4.1, b) eine etwas andere Konstruktion, c) Konstruktion mit zwei Loten und einer Längenübertragung

1. Woran kann man sehen, dass alle Gerono'schen Lemniskaten mathematisch ähnlich sind?
2. Bauen Sie die Konstruktionen nach und tragen Sie zum Vergleich die kartesische Gleichung 4.33 ein.
3. Die Herleitung der kartesischen Gleichung ist bei Konstruktion b) besonders einfach, für a) lesen Sie den Hinweis.

Hinweis

Zu 3.: Für den Beweis von a) hilft die unterste Zeile von Satz 4.1 in Abschnitt 4.1.4.3. Sie führt auf $(u-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4},\quad x^2+t^2=a^2,\quad x\,y=u\,t$. Denken Sie an den Eliminate-Befehl von `http://www.wolfram-alpha.com`. Eine Erklärung finden Sie in Abschnitt 3.1.1.5. ◀

Lösung:

Zu 1. Ähnlichkeit Am besten sieht man diese an der Polargleichung, der Faktor a^2 bewirkt lediglich eine zentrische Streckung.

Zu 2. Konstuktionen Auf der Webseite sind die Konstruktionen sowohl einzeln in GeoGebra zu haben, als auch in einer Gesamt-Datei für „Gerono 1", als Mittenkurve von Parabeln, „Gerono 2", als Versiera von zwei Kreisen (Bild a), „Gerono 3", als Konstruktion in Bild b). Dadurch dass man je zwei Konstuktionen gleichzeitig einschalten kann, sieht man, wie alles zusammenpasst. Ein Beweis wird daraus erst, wenn man sich klarmacht, wie man die eine Konstruktion aus der anderen erzeugen könnte.

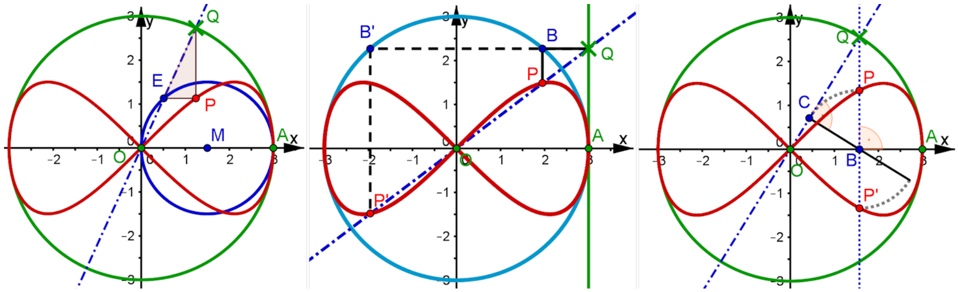

Abb. 4.19 Gerono'sche Lemniskate in drei Konstruktionen: a) Gerono'sche Lemniskate als allgemeine Versiera nach Definition 4.1 , b) eine etwas andere Konstruktion, c) Konstruktion mit zwei Loten und einer Längenübertragung

Zu 3. Rechnerische Beweise für Bild b) „Gerono 3“: Es ist $Q = (a, v)$ und nach dem Strahlensatz $v\,x = a\,y$. Der Punkt $B = (s, t)$ liegt auf dem Kreis $s^2 + t^2 = a^2$ und es gilt $x = s$ und $v = t$. Somit folgt $x^2 + v^2 = a^2$ und dann $x^2 + \left(\frac{a\,y}{x}\right)^2 = a^2$. Wir haben $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$, Gleichung 4.33, wie erwartet.

Für Bild c) „Gerono 4“ gibt es eine Extradatei, ein geometrischer Beweis ist mir nicht eingefallen. Rechnerisch verwende ich den Höhensatz für das Dreieck OBQ mit den Hypotenusenabschnitten b und $a - b$. Dann gilt $y^2 = \overline{CB}^2 = b(a - b)$. In den ähnlichen Höhendreiecken gilt $\frac{b}{x} = \frac{y}{v}$, also folgt $y^2 = \frac{y\,x}{v}\left(a - \frac{y\,x}{v}\right)$. Mit $x = u$ gilt für den Weg von Q nun $x^2 + v^2 = a^2$ und wir haben zwei Gleichungen, aus denen wir nur noch v eliminieren müssen. Das führt tatsächlich auch zu $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$.