In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

5.1.3 Die Topfblumen-Kurven

Aufgabe 5.1 Variationen zu Topfblumen

Am meisten Freude am mathematischen Tun hätten Sie, wenn Sie die Dateien nachbauten – oder die von der Website nähmen – und sich die Wandlung der Formen bei Variation von a und b ansähen. Dann kämen die Fragen von allein und Sie hätten Lust, sie sich selbst zu beantworten. Für Begründungen ist die **Betrachtung der Geometrie sinnvoll und auch mathematisch wertvoll**. Wenige Antworten wird man von der Gleichung zu erwarten haben. Verabschieden Sie sich (ggf.) von dem Anspruch: ein Beweis muss immer „errechnet" werden.

1. In Abb. 5.3 (Buch) liegt der Ursprung O um 0.01 höher als der Kreis, denn $a = 2.01$ und $b = 2$. Sehen Sie sich an, wie empfindlich die violette Topfblume auf winzige Änderungen von a reagiert. Die rote Topfblume ist in diesem Parameterbereich „robuster".
2. Sehen Sie sich die Abb. 3.7 im Vergleich mit der violetten Topfblume an. Es ist eine Parabel-Konchoide. Auch die Parabel liegt nur sehr knapp unter dem Ursprung. Die Parabel-Konchoide hat ebenfalls oben die Pilzform, aber unten biegen sich die Äste nicht zusammen wie sie es bei der violetten Topfblume tun, die – wie oben gezeigt – eine Kreis-Konchoide ist.
3. Warum erhält man für $a = b$ eine Pascal'sche Schnecke nach der Konstruktion in Abb. 3.5? ($A = (-a, 0)$, Mittelpunkt des grünen Kreises, dessen Radius b ist, in der Datei ist es r.)
4. Was macht die Wahl $a = 0$ mit den Topfblumen? Zeigen Sie unter Verwendung der Gleichung, dass aus der roten Topfblume zwei Kreise werden. Nehmen Sie als Erfahrung mit, dass in solchen Grenzfällen das Ortslinien-Werkzeug Schwierigkeiten hat. Für die violette Topfblume ergibt sich eine geometrisch klare Situation.
5. Bestimmen Sie aus der Geometrie die Schnittpunkte der Topfblumen mit der y-Achse. Rechnerisch kommen natürlich mit CAS dieselben Schnittpunkte heraus, von Hand ist eine Gleichung 4. Grades übrig, bei der man nur Chancen hat, wenn man Lösungen weiß. Eben: man weiß sie!
6. Konstruieren Sie gemäß Abschnitt 5.1.3.2 die Enkel-Kurven zu den Topfblumen. Für die rote Topfblume mit $a = b$ kommt eine „Blumenknolle" heraus, die schon ausgetrieben hat.

Hinweis

Die Dateien finden Sie wie immer auf der Website zum Buch. ◀

Lösung: In der zu dieser Aufgabe und Abb. 5.3 (Buch S. 136) gehörigen GeoGebra-Datei sind alle Topfblumenkurven einzeln oder gemeinsam zu betrachten. Dadurch kann man besser über Zusammenhänge und Besonderheiten nachdenken, als wenn es Einzeldateien gäbe.

Zu 1. und 2. und 6. Tun Sie es wirklich!

Zu 3. Der grüne Kreis trifft den Ursprung In diesem Fall ist die Konstruktion für die violette Topfblume tatsächlich genau diejenige für eine Pascal'sche Schnecke, bei der die Leinenlänge gleich dem Radius des Wanderkreises ist. Siehe Abb **??** a) hier.

Zu 4. Der grüne Kreis hat den Ursprung als Mittelpunkt Für die **rote Topfblume** ist E per Konstruktion auf der x-Achse. damit auch P und P' und die ganze geometrische Ortskurve. Rechnerisch folgt mit $a = 0$ aus der Gleichung S. 137 nun $y^2(x^2+y^2)^2 = 4b^2y^4$. Hier ist die x-Achse eine Doppellösung, aber auch $x^2 + y^2 = \pm 2by$, das sind zwei Kreise mit den Mittelpunkten $(0, \pm b)$. Diese haben keine geometrische Entsprechung.

Für die **violette Topfblume** wird der Radiusvektor von O nach Q verdoppelt und es ergibt sich ein Ursprungskreis mit dem Radius $2a$. Die zugehörige Enkelkurve (in Abb. 5.1 hellgrün) ist ebenfalls ein Ursprungskreis, aber mit dem Radius $3a$.

Die **Enkelkurve** der zum Strich der auf der x-Achse zusammengeschmolzenen roten Topfblume ist **überraschend eine Ellipse**. Per Definition der Enkelkurven in Abschnitt 5.1.3.2 ist es ja diejenige Kurve, die als C_2 genommen werden müsste, um mit dem grünen Kreis als C_1 die rote Topfblume als Cissoide zu erhalten. Abb. 5.1 zeigt eindrucksvoll, dass für diese Ellipse die hellgrüne Enkelkurve der Hauptkreis und der gegebene Wanderkreis von Q (in der Abb. hellblau übermalt) der Nebenkreis ist. Sie hat die Gleichung $\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

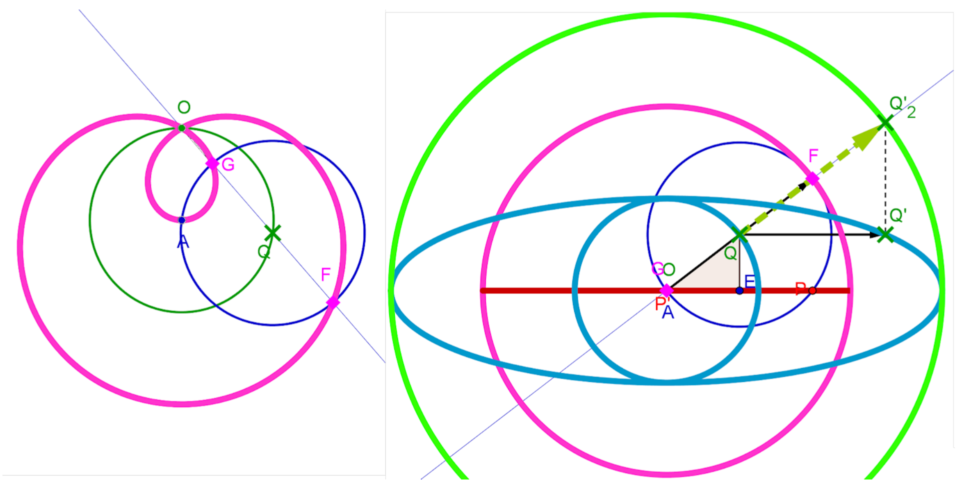

Abb. 5.1 **Aufgabe 5.1 Topfblumen-Sonderfälle** links: zu 3 Wanderkreis von Q enthält den Ursprung
rechts: zu 4. Wanderkreis von Q hat den Ursprung als Mittelpunkt

Zu 5. Schnitte mit der y-Achse Überlegen, Hinsehen oder Rechnung ergibt als Schnittstellen mit doppelt $y = 0$ und $y = -a$, einfach $y = -a \pm 2b$