In: **Kurven erkunden und verstehen**
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

5.1.4 Das gefangene Zweiblatt

Aufgabe 5.2 Erkundungen des Zweiblattes
Beide Konstruktionen erzeugen *dasselbe* Zweiblatt, denn in der Konstruktion aus Abb. 5.2 a) (hier) ist der rechte Winkel bei Q, der in der zweiten Konstruktion gefordert wird, dadurch gesichert, dass der grüne Kreis als Thaleskreis über $\overline{OA}$ aufgefasst werden kann. $\overline{QP}$ist also in beiden Fällen die Höhe in dem rechtwinkligen Dreieck OEQ.

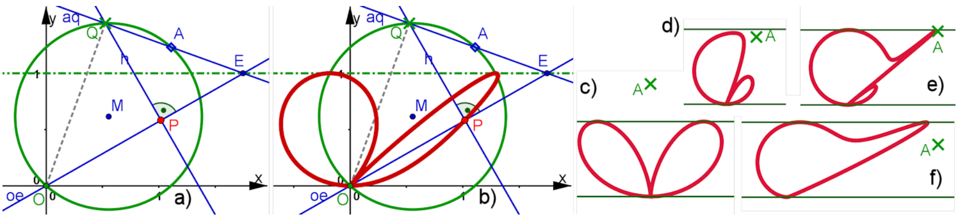

Abb. 5.2 **Das gefangene Zweiblatt (Buch Abb. 5.4 S 139** a) Konstruktion b) Zweiblatt c)-f) Das Zweiblatt mit anderen Lagen von Punkt A: c) (0,1.5) d) (0.4,0.9) e) (1.2,0.98) f) (2,0.5)

1. Wann liegt A auf dem Zweiblatt? Argumentieren Sie geometrisch *und* mit der Gleichung.
2. Wo schneidet das Zweiblatt die y-Achse außer in $y = 0$?
3. Die Frage nach gemeinsamen Punkten mit der Geraden $y = w$ führt auf $x = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 + 4w\,q - 4w^2}\right)$ und beide Schnittstellen sind doppelt. Was können Sie daraus schließen? Was haben die Schnittpunkte mit dem Kreis aus der Konstruktion Abb. 5.2 a) (hier) zu tun? Beachten Sie ggf. den Hinweis.
4. Wie können Sie mit den Erkenntnissen aus dem vorigen Punkt begründen, dass das Zweiblatt in dem Streifen aus der x-Achse und der Gerade $y = w$ gefangen ist.
5. Wenn man A langsam von oben auf die Gerade $y = w$ zieht, wird das eine Blatt immer schmaler, die Kurve scheint instabil zu sein, das schmale Blatt verschwindet kurz, dann entsteht unten ein neues kleines Blatt. Setzt man für q das w in die Gleichung ein, ergibt sich in `http://www.wolfram-alpha.com` nach Vereinfachung mit `//Simplify` dann $(-w\,x + p\,y)(x^2 + y(-w + y)) = 0$. Deuten Sie damit die beschriebenen Phänomene.

Hinweis
Zu 3.: Tragen Sie die Parabel $y = w - \frac{1}{4w}x^2$ in die Zeichnung ein. Bewegen Sie A in den Parabelbogen hinein und wieder heraus. Beobachten Sie, was sich bezüglich des Schnittes mit $y = w$ ändert. Überlegen Sie, wo die Gleichung der Parabel herkommt. Bedenken Sie, dass Sie evtl. mit dünnen Strichdicken und starkem Zoom scheinbare Widersprüche auflösen können.
Die Datei zum Zweiblatt finden Sie auf der Website zum Buch. ◀

Lösung: Zuerst sollten Sie mit dem Zweiblatt spielen. Dann finden Sie selbst Fragen und ihre Antworten.

Zu 1.: A auf dem Zweiblatt A liegt immer auf der Kathetengeraden EQ des rechtwinkligen Dreiecks OEQ, aber P ist dessen Höhenfußpunkt. Zusammenfallen dieser beiden ist nur in dem Sonderfall $A = E$ möglich, also wenn A auf der Geraden g_w mit $y = w$ liegt. Dann fällt das Zweiblatt zu einer Durchmesserstrecke zusammen.

Rechnerisch müsste $A = (p, q)$ die Gleichung $\left(x^2 + y^2\right)\left(y^2\left(p^2 + q^2\right) + w^2\left(x^2 + y^2\right)\right) =$

$wy\left(2\left(x^2 + y^2\right)(px + qy) + (qx - py)^2\right)$ erfüllen, was auf $(p^2 + q^2)(q - w) = 0$ führt. Das wird ausschließlich von $q = w$ erfüllt.

Zu 2.: y-Achsenschnitt? Mit $x = 0$ ergibt sich $y = \frac{p^2 w}{p^2+(q-w)^2}$. Der Fall $p = 0$ ist in Abb. 5.2 c) (hier) als symmetrisches Zweiblatt gezeigt. Wenn nun $q \neq w$, ergibt sich stets eine weiterer Punkt des Zweiblattes auf der y-Achse.

Zu 3. und 4.: Berührung der Geraden g_w Mit $y = w$ ergibt sich mit Faktorisierung $w^2\left(-px - qw + w^2 + x^2\right)^2 = 0$ Man sieht, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung aus der Klammer doppelt gezählt werden müssen. Der grüne Kreis hat die Gleichung $\left(x - \frac{p}{2}\right) + \left(y - \frac{q}{2}\right) = \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4}$. Das ist kurz $x^2 - px + y^2 - qy = 0$. Man sieht nun auch rechnerisch, dass das Zweiblatt die Grade g_w in den Schnittpunkten mit dem grünen Kreis berührt. Die Berührung muss „von unten" erfolgen, da weitere Schnitte mit der Geraden g_w nicht vorhanden sind. Wir betrachten o.B.d.A nur $w \geq 0$, P liegt auf OE auf damit niemals unterhalb der x-Achse. Das Zweiblatt ist gefangen im Streifen $y = 0$ bis $y = w$.

Zu 4.: Parabel-Diskriminante Die eben berechnete Berührung findet nur statt, wenn die Diskriminante in der und 3. genannten Wurzel nicht-negativ ist. Mit $y = q$ muss also $y > w - \frac{x^2}{4w}$ sein. Zeichnet man die Parabel als Rand der Ungleichung ein, so gibt es für A im konkaven Bereich der Parabel **kleine Zweiblattkurven**, die die Gerade g_w nicht mehr erreichen, gezeigt in Abb. 5.2 d) (hier).

Zu 5.: Phänomene bei A fast auf g_w Abb. 5.2 e) (hier) zeigt so einen Fall. Die angegebene Gleichung ist ein Produkt aus der Geraden $y - \frac{w}{p}x = 0$, also der Geraden OA im Sonderfall aus 1. und dem Kreis $x^2 + \left(y - \frac{w}{2}\right)^2 - \frac{w^2}{4} = 0$. Im Umgang mit der Datei sieht man, dass es durchaus Punkte P auf diesem Kreis gibt: E liegt in diesem Fall nämlich nicht fest und EA ist die Gerade g_w.

Fazit: Die Konstruktion ohne Kreis hat mein Kollege Dieter Riebesehl erfunden, ich habe dann den Kreis „gesehen". Es ist faszinierend, wieviel schöne Mathematik in einer solchen frei erfundenen Aufgabe steckt.