In: **Kurven erkunden und verstehen**
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

5.2 Frei erfundene Gleichungen und ihre Kurven

Aufgabe 5.4 Kurvenfamilie mit isolierten Punkten im Grenzfall
Es geht um die Kurven mit der Gleichung $\left(x^2-a^2\right)^2+\left(y^2-b^2\right)^2=h$. Abb. 5.3 zeigt Bilder für einige Werte von a, b, h.

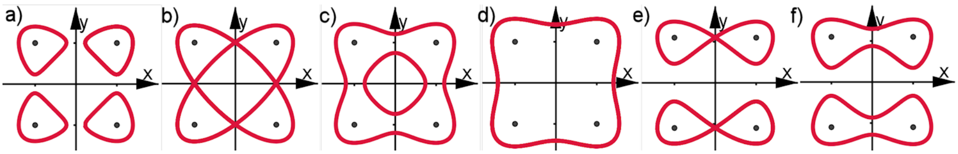

Abb. 5.3 Aufgabe 5.4 Isolierte Punkte im Grenzfall

1. Geben Sie die Gleichung ein und experimentieren Sie mit Schiebereglern a, b, h. Versuchen Sie, die in Abb. 5.3 gezeigten Fälle zu finden.
2. Wann und warum haben die Bilder die x-Achse, die y-Achse oder beide Achsen als Symmetrieachsen.
3. In Abb. 5.3 b) scheinen sich zwei Ellipsen zu schneiden. Denken Sie sich eine Strategie aus, wie Sie dies untermauern, beweisen oder widerlegen.
4. Von Bild c) nach Bild d) ist h verändert. Für welches h verschwindet das innere Oval?
5. Vergleichen Sie die gegebenen Kurven mit $x^2(x-2a)^2+y^2(y-2b)^2=h$.

Hinweis
Sie können die Fragen elementar beantworten. Eine schöne Übersicht aber bietet die 3D-Sicht, die im Abschnitt 5.3 vorgestellt wird. Als Werkzeug ist GeoGebra geeignet, wenn Sie a, b, h zwischen 0 und 2 wählen. Die Datei finden Sie auch auf der Website zum Buch.

◀

Lösung: Auf der Website im Bereich 05 Frei und hoch ist nun eine gute GeoGebra-Datei zu finden, bei der die Funktion $z(x,y)=(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2-n$ als „Topf mit vier Beinen"im 3D-Grafikfenster dargestellt ist. Im Laufe der Arbeit an diesem Buch haben sich die 3D-Möglichkeiten erheblich verbessert. Die Erhöhung von n senkt den Topf ab, die Schnittkurven mit der Grundebene sind in beiden Fenstern leicht zu erkennen.

Zu 1.: Erscheinungsformen Die vier **isolierten Punkte** $(\pm a, \pm b)$ für $n=0$ sind schon im Text erwähnt. Für $a=b$ gibt es in Abb. 5.6 (Buch) von a) bis d) die doppelt-achsensymmetrischen Formen, die auch zu den Winkelhalbierenden symmetrisch sind. Die letztgenannte Symmetrie geht bei $a \neq b$ verloren.

Rechnung für e): $x=0$ folgt $(y^2-b^2)^2=n-a^4$. Also wenn $n \geq a^4$ wird, wachsen je zwei Inseln auf der y-Achse zusammen Das geschieht im Falle $b>a$ bei wachsendem n eher als das Entsprechende für die x-Achse.Daher zeigen e) und f) an, dass $b>a$ ist.

Zu 3.: Ellipsen Für den Fall Abb. 5.6 b) gilt also $a = b$ und $n = a^4$. Daraus folgt $(x^2 - a^2)^2 = y^2(2a^2 - y^2)$. Gibt man dies in GeoGebra ein, so siecht man die beiden Ovale. Deren Achsenschnittpunkte und ein weiteren Punkt auf der Kurve verwendet man für „Kegelschnitt aus 5 Punkten“. Tatsächlich erscheint dieser genau auf dem einen Oval. Mit dem Button „Drehung“ und 45° richtet man dieses waagerecht aus und erhält, wie erwartet, eine achsenparallele Ellipse und dazu eine offensichtliche Ellipsengleichung un Mittelpunktslage.

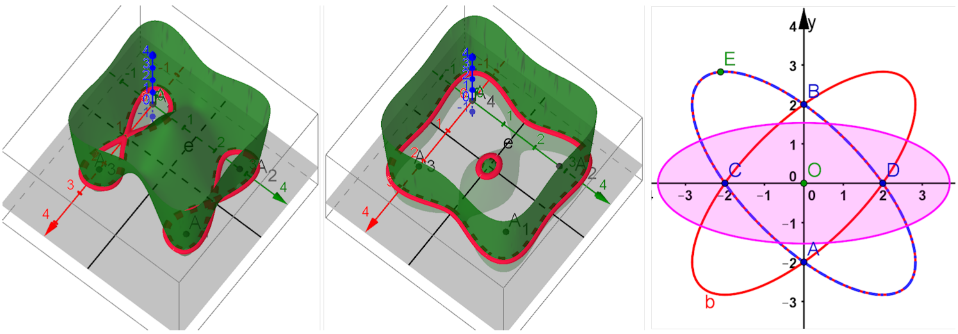

Abb. 5.4 Aufgabe 5.4 3D-Sicht und Ellipsenschnitt

Zu 4.: Das innere Oval In der 3D-Sicht erkennt man im Inneren des Topfes einen Hügel. Er hat die Höhe $(0 - a^2)^2 + (0.b^2)^2 - n$, sinkt mit wachsendem n nach unten und verschwindet für $n = a^4 + b^4$.

Zu 5.: Verschobener Topf Aus der Gleichung $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = n$ entsteht durch die 3. binomische Formel $(x + a)^2(x - a)^2 + (y + b)^2(y - b)^2 = n$ eine implizite Gleichung, die durch Verschiebungen $x \to x - a$ und $y \to y - b$ in $x^2(x - 2a)^2 + y^2(y - 2b)^2 = n$ übergeht. Also handelt es sich um einen mit dem Vektor $\binom{a}{b}$ verschobenen Topf. Dieser ist in der GeoGebra-Datei gezeichnet.