In: Kurven erkunden und verstehen
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

5.3.1 Familien der raumverwandten Kurven

Aufgabe 5.6 Raumverwandte der Kurven
Die obigen Darstellungen und Überlegungen lassen sich leicht auf andere Kurven übertragen. In GeoGebra ist es günstiger, die Raumfläche zu verschieben und die Schnitte mit der Grundebene zu betrachten. Dort können auch die Funktionen f mit angezeigt werden. Man sieht dann, ob alles passt.

1. Untersuchen Sie die Raumverwandten der Neil'schen Parabel mit der kartesischen Gleichung $F(x, y) = x^3 - y^2 + c$ sowohl im 3D-Fenster als auch durch Betrachtung von $f(x) = y = \sqrt{x^3 + c}$. Zeigen Sie, dass die Funktion f die y-Achse stets waagerecht schneidet und deuten Sie dieses in der räumlichen Version. (Bezug: Gl. **??**)
2. Untersuchen Sie entsprechend die Cissoide des Diokles mit der Gleichung $F(x, y) = x^3-(2-x)y^2+c$ (Fehlerteufel: in der Klammer x statt y!) und die passende Funktion f (Bezug: Gl. 3.18). Vergleichen Sie mit dem f aus der Neil'schen Parabel.
3. Die gerade Strophoide mit der Gleichung $z = z(x, y) = (a + x)x^2 - (a - x)y^2 + c$ (Fehlerteufel: in der ersten Klammer + statt −!) hat als Raumfläche einen Extrahügel ähnlich der Trisektrix in Abb. 5.11 (Buch). Untersuchen Sie die raumverwandten Kurven der Strophoide (Bezug: Gl. 3.9). Welche Koordinaten hat das Hügelmaximum (für c=0)?
4. Berechnen Sie selbst die Punkte H und H_v aus dem obigen Abschnitt zur Konchoide.

Hinweis
Alle diese Kurven ließen sich nach y auflösen. Daher können Sie für die Untersuchungen Ihre üblichen Analysis-Methoden und Werkzeuge anwenden. ◀

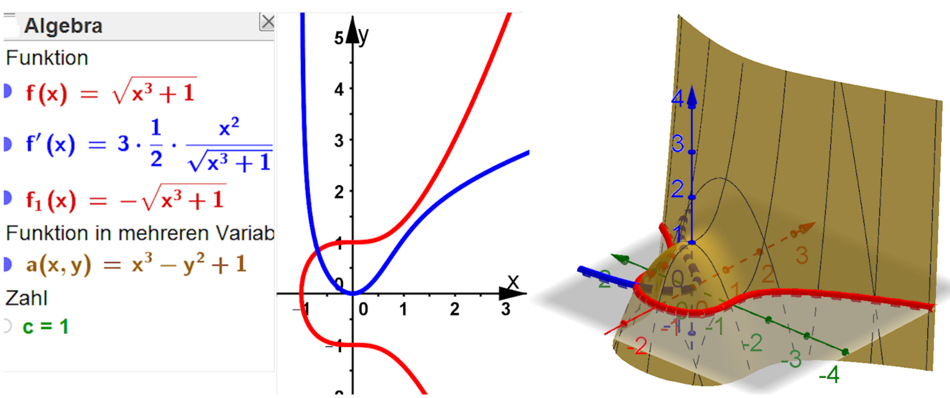

Abb. 5.7 Aufgabe 5.6 Zu 1.: Neil'sche Parabel 3D
a) Algebrafenster, b) 2D-Fenster, c) 3D-Fenster

Lösung: Abb. 5.7 (hier), zu 1.: Raumverwandte der Neil'schen Parabel Für positive wachsende c kommt der braune Wulst immer mehr nach oben, dabei schneiden die Schnittkurven mit der Grundfläche, also die Raumverwandten der Neil'schen Parabel, die (grüne) y-Achse stets waagerecht. Im Algebrafenster sieht man im Zähler der Ableitung x^2 unabhängig von c. Für $c = 0$ erhält man die Neil'sche Parabel selbst mit ihrer Spitze im Ursprung, im Bild c) kann man sie sich vorstellen in einer Ebene in der Höhe 1. Noch höhere Ebenen schneiden die „Hinterwand" nur in einem Bogen, der für $y = 0$ eine zur y-Achse parallele Tangente hat. Diese Fälle entsprechen negativen Werten von c, im 2D-Fenster gibt es dann keine waagerechten Tangenten mehr.

Zu 2.: Raumverwandten der Cissoide des Diokles Da diese Cissoide wie die Neil'sche Parabel eine Spitze im Ursprung hat, ergibt sich als zugehörige 3D-Raumfläche eine sehr ähnliche Form. Aber die zugehörigen raumverwandten Kurven haben für $c > 0$ keine waagerechten Tangenten mehr. Das sieht man am Zähler der 1. Ableitung. Für $c < 0$ gilt dasselbe wie oben. Wie die Cissoide selbst haben die Raumverwandten auch die Asymptote $x = 2$ und für größere x keine reellen Werte mehr. Die GeoGebra-Datei ist auf der Website.

Zu 3.: Strophoide Schnittkurve mit der x-z-Ebene ist $z(x) = (a+x)x^2$. Das ist ein sehr überschaubares Polynom 3. Grades mit Berührung im Ursprung und weiterer Nullstelle bei $x = -a$. Abb. 4.12 b) im Buch zeigt, dass das Maximum dann an der Stelle $x = -\frac{2}{3}a$ liegen muss und damit die Ordinate $z = \frac{4}{27}a^3$ hat. Für diesen Wert $c = -\frac{4}{27}a^3$ hat die Raumverwandte einen isolierten Punkt in $(-\frac{2}{3}a, 0)$ und einen Ast, der von rechts bis $(\frac{a}{3}, 0)$ reicht. Für kleinere c gibt es nur noch einen leicht gebogenen Ast, für größere c, also wenn sich die Raumfläche hebt, gibt es für $c < 0$ ein getrennt liegendes konkaves Kurvenstück, für $c = 0$ die wirkliche Strophoide, für $c > 0$ zunächst Kurven mit „Knauf". Bis $c = 3$ (bei $a = 2$) haben diese (nach Sicht) noch eine waagerechte Tangente. Für welches c passiert das genau? Die GeoGebra-Datei ist auf der Website.

Zu 4.: Konchoide des Nikomedes 3D In der Funktion $z = z(x, y) = k^2y^2 - (x^2 + y^2)(y - a)^2$ mit $k = 3$ und $a = 2$ ist eine Schnittkurve mit der y-z-Ebene gegeben durch $z = z(0, y) = y^2(9 - (y - 2)^2)$. Dieses Polynom 4. Grades hat ein Minimum im Ursprung. Die beiden Maxima lassen sich auch von Hand exakt berechnen, siehe Datei mit GeoGebra-CAS auf der Website. Es ergeben sich die im Text vor dieser Aufgabe genannten Werte. Datei afg5.6-4-koncho3D.ggb auf der Website.

Interessant ist, dass der Schnitt mit der Asymptotenebene $y = a$ auf $z = k^2a^2$ führt, die Raumverwandte in dieser Höhe besteht also aus einer exakten Geraden, deren Punkte die Gleichung erfüllen, und einem glockenförmigen Ast, der diese Gerade als Asymptote hat. In noch größerer Höhe wächst die Gerade mit diesem Ast zu einer geschlossenen Kurve zusammen. Das kann man sich mit $k^2a^2 + \varepsilon = k^2y^2 - (x^2 + y^2)(y - a)^2$ für $-50 < \varepsilon < 50$ sehr schön ansehen. Datei afg5.6-4-koncho3D-erg.ggb auf der Website.