In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

7.7.1 Krümmungskreise von Ellipse, Hyperbel und Parabel

Aufgabe 7.1 Krümmungskreise der Hyperbel und der Parabel

a) Finden Sie entsprechend eine Krümmungskreis-Konstruktion für die Hyperbel. b) Für die Parabel ist es sinnvoll, zwei Fälle zu unterscheiden 1.) Wenn man den Parabelparameter p kennt (oder sich von GeoGebra den Brennpunkt zeigen lässt): p ist der Krümmungsradius im Scheitel. 2.) Für $y = a\,x^2$ ist $\frac{1}{2a}$ dieser Radius. Sehen Sie sich in Abb. **??** an, wie man Kehrwerte konstruiert.

Üben Sie sich darin, eine verständliche Konstruktionsbeschreibung zu verfassen. Diese Krümmungskonstruktionen eignen sich auch, um in großem Maßstab, z.B. auf einem Schulhof oder einer Wiese, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln zu realisieren. Dabei wird dann auch deutlich, dass der Krümmungsbegriff *zur Kurve* gehört und nicht vom Koordinatensystem abhängig ist.

Hinweis

Verwenden Sie $-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ bzw. $y = \frac{1}{2p}x^2$ oder $y = a\,x^2$, damit Sie im Scheitel Steigung 0 haben. ◀

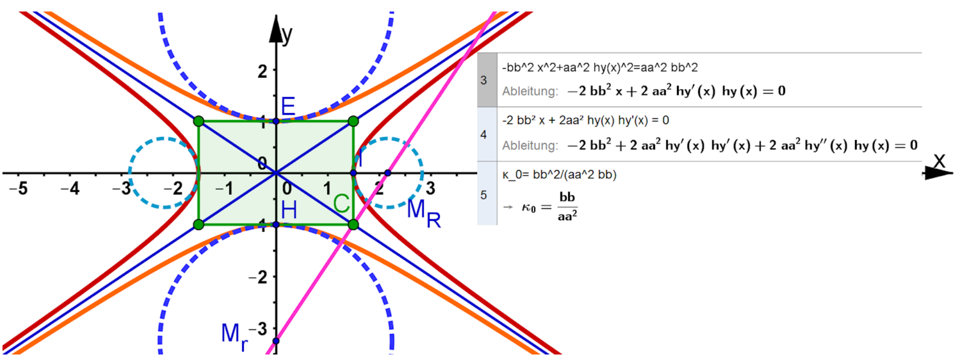

Abb. 7.1 Aufgabe 7.1 Scheitelkrümmungskreise: a) Hyperbel

Lösung: Zu a) Hyperbel Zeichne ein achsensymmetrisches Rechteck mit der Breite $2a$ und der Höhe $2b$ mit seinen Diagonalen. Sie sind die Asymptoten der beiden Hyperbeln. Errichte in einer Ecke des Rechtecks eine Senkrechte auf der Diagonalen. Sie schneidet die beiden Achsen in zwei Punkten M_r und M_R, die die Mittelpunkte der passenden Scheitelkrümmungskreise sind.

Geometrisch: Es gibt ähnliche rechtwinklige Dreiecke in Abb. 7.1 (hier). Bei M_r gilt $\frac{r}{a} = \frac{a}{b}$, also $r = \frac{a^2}{b}$. Entsprechend gilt bei M_R rechts $\frac{R}{b} = \frac{b}{a}$, also $R = \frac{b^2}{a}$.

Rechnerisch: Für r ist ein Stück aus GeoGebra-CAS ins Bild eingefügt. Dort stehen aa für a und bb für b, da $a = 1.5$ und $b = 1$ in derselben Datei durch Schieberegler belegte Werte sind. Man muss umtaufen, damit mit das CAS noch echte freie Parameter hat.

Es ist auch gezeigt, dass man mit einer nicht festgelegten Funktion $hy(x)$ die impliziten Ableitungen problemlos bewältigt. Für die orangefarbene Hyperbel ist $hy'(0) = 0$, so dass $r = \frac{1}{\kappa_0}$ ist. Das passt genau zu den geometrisch erzeugten Größen, also ist die Konstruktion richtig.

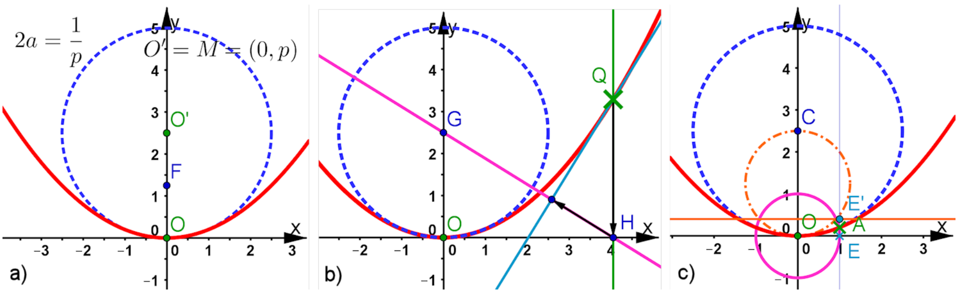

Abb. 7.2 Aufgabe 7.1 b) Scheitelkrümmungskreis der Parabel a) Brennpunkt F, Ordinate verdoppeln, b) beliebiger Punkt Q auf der Parabel liefert mit dem Lot auf die Tangente den Mittelpunkt, c) Ordinate an der Stelle 1 verdoppel, zugehörige Waagerechte am Einheitskreis spiegeln liefert den Mittelpunkt

Zu b) Parabel In Abb. 7.2 (hier) sind drei Arten vorgestellt, den Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises zu konstruieren.

Das **rechnerische Vorgehen** steht auch im CAS der GeoGebra-Datei: $y = ax^2$, $y' = 2ax$ und $y'' = 2a$ ergibt an der Stelle $x = 0$ die Krümmung $\kappa_0 = 2a$. Darum ist der Krümmungsradius $r = \frac{1}{2a} = p$.

Bild a) zeigt mit einem Brennpunkt, den man von GeoGebra anzeigen lässt, durch Verdoppelung der Ordinate schon gleich den Mittelpunkt.

Bild b) nutzt die Geometrie der Parabel: Von einem beliebigen Punkt Q der Parabel fällt man das Lot auf die x-Achse und vom Fußpunkt H das Lot auf die Tangente in Q. Diese erhält man als Verbindungsgerade von Q und der Mitte zwischen O und H (oder von GeoGebra als `Tangente[Q,y=a x^2]`. Dieses Lot schneidet die y-Achse im gesuchten Mittelpunkt. Das kann man auf zwei Arten einsehen:

Erstens: Denkt man sich H um $\frac{p}{2}$ tiefer, also auf der Leitgeraden, dann wird G zum Brennpunkt F, die Tangente ist Mittelsenkrechte auf $\overline{FH}$ und alles ist richtig.

Zweitens: Mit $Q = (u, a\,u^2)$ hat die Tangente hat die Steigung $2au$, $H = (u, 0)$, die violette Gerade ist $y = -\frac{1}{2a\,u}(x - u)$. Sie schneidet die y-Achse mit der Ordinate $y_0 = \frac{1}{2a} = p$, genau wie wir es brauchen.

Bild c) nutzt die Ordinate a an der Stelle $x = 1$: Die verdoppelte Ordinate erzeugt die orangefarbene Gerade $y = 2a$, die am violetten Einheitskreis gespiegelt (Kreisspiegelung, Inversion) wird. Damit hat Punkt C die Ordinate $\frac{1}{2a} = p$, wie wir es brauchen.

Die GeoGebra-Dateien sind auf der Website im Bereich 07 Kegelschnitte.