In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 7.11 Die drei ??? tauchen auf

Q wandert auf dem Kreis um A durch O, C hat dieselbe Ordinate wie Q. Die Geraden BC und AQ schneiden sich in P, siehe Abb. 7.28 c) im Buch S. 218 oder Abb 7.17 a). Die drei ??? erscheinen unvermutet als Ortskurven von P bezüglich Q, wenn man drei wesentliche Stellungen von $B = (b, 0)$ *(Das ist günstiger als es im Buch genannt ist.)* betrachtet. Prüfen Sie mit dem 5-Punkte-Tipp aus Aufgabe 7.5

Hinweis

Diese Aufgabe steht bei [Schupp 2000, S. 67 Bspl. 4] in anderer Stellung. ◀

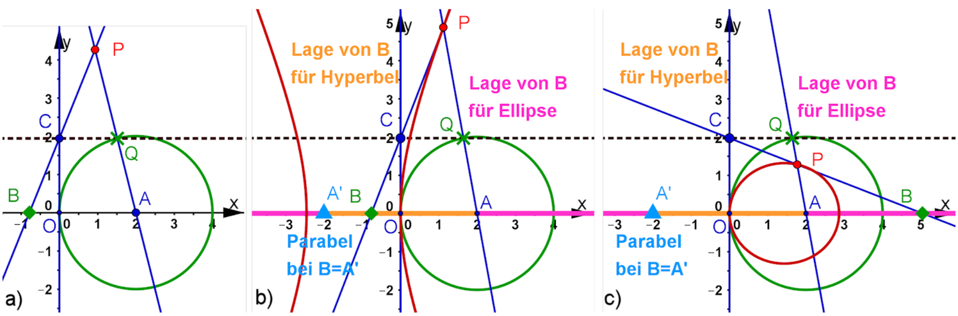

Abb. 7.17 Aufgabe 7.11 Die drei ??? (Fragezeichen)
a) Aufgabenstellung: $A = (a, 0)$, und $B = (b, 0)$, Punkt Q wandert auf dem Kreis, AQ definiert C auf der y-Achse, Schnitt von BC und AQ definiert P.
b) Die Ortskurve von P ist eine **Hyperbel**, wenn B im orangefarbenen Bereich liegt, eine **Parabel** für $B = A'$ und
c) eine **Ellipse** sonst. Die drei ??? sind also die Kegelschnitte. Isolierter Punkt und Doppelgerade sind sogar auch dabei.

Lösung Der Weg von $Q = (u, v)$ ist Gleichung (1) $(u - a)^2 + v^2 = a^2$. Die Gerade AC erfüllt Gleichung (2) $y = -\frac{v}{b}(x - b)$, was $v = -\frac{b\,y}{x-b}$ zur Folge hat. Die Gerade BC erfüllt (3) $y = \frac{v}{u-a}(x - a)$, was mit Gl. (2) zu $y(u - a) = -\frac{b\,y}{x-b}(x - a)$ führt. Kürzen von y ($y = 0$ wird extra betrachtet) ergibt $(u - a) = -\frac{b(x-a)}{x-b}$. Dieses mit (2) in (1) eingesetzt hat nach Beseitigung der Nenner und Zusammenfassung das Ergebnis $(a^2 - b^2)x^2 - 2ab(a - b)x - b^2y^2 = 0$.

Parabel und Sonderfälle Wenn $a = -b$ ist, fällt der x^2-Term weg, und die **Parabel** $y^2 = 4ax$ ist die Ortskurve. Ihr Parabelparameter ist $p = 2a$ und damit ist A ihr Brennpunkt und $B = A'$ liegt auf der Leitgeraden.

Wenn $a = b$, also für $B = A$, zeigt GeoGebra nur **Punkt** A an, wie es sich auch aus der Geometrie ergibt. Rechnerisch fallen beide x-Terme weg und $y^2 = 0$ beschreibt die x-Achse. Von dieser ist aber geometrisch nur A Lösung.

Für $B = O$, also $b = 0$ ist die y-Achse Lösung, zwei Hyperbeläste „fallen zusammen", Lösung ist also eine **Doppelgerade**.

Ellipsen und Hyperbeln Sei nun $a^2 \neq b^2$. Ausnutzung der 3. binomischen Formel beim Dividieren durch $(a^2 - b^2)$ bringt $x^2 - 2\frac{a\,b}{a+b}x - \frac{b^2}{a^2-b^2}y^2 = \left(\frac{a\,b}{a+b}\right)^2$. Damit haben wir für $a^2 > b^2$ eine **Hyperbel** (orangefarbener Bereich für B) und für $a^2 < b^2$ ein **Ellipse** (violetter Bereich für B).

Mittelpunkt und Scheitel Der Mittelpunkt dieser beiden Kegelschnitte ist $\frac{a\,b}{a+b}$. Er rückt für $b \longrightarrow \pm\infty$ von links, bzw. rechts gegen A. Das sieht man an $\frac{a}{\frac{a}{b}+1}$.

Ein Scheitel erfüllt $y = 0$, da die Konstruktion symmetrisch zur x-Achse angelegt ist. $x^2 - 2\frac{a\,b}{a+b}x = \left(\frac{a\,b}{a+b}\right)^2$ ergibt $x = 0$ oder $x = \frac{2a\,b}{a+b}$.

Für $b \longrightarrow -a$ kann man umschreiben $b = -a \pm \varepsilon$ und erhält für den anderen Scheitel $x_s = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2a^2 \pm 2a\varepsilon}{\pm\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \pm\infty$. Bewegt sich B vom Ursprung aus nach links, so wandert der linke Scheitel der Hyperbel nach links in Unendliche und kommt dann von rechts als Ellipsenscheitel wieder herein, er nähert sich dann dem grünen Kreis von außen.

Wandert B vom Ursprung aus nach rechts, so rückt der rechte Hyperbelscheitel an A heran. Danach rückt ein Ellipsenscheitel nach rechts von innen an den grünen Kreis heran. Für endliche Stellungen von B wird aber A nicht erreicht. Diese Ellipsen sind alle innerhalb des grünen Kreises.

Fazit Ich finde es erstaunlich, wie ergiebig diese einfache Konstruktion ist. Die verschieden Fälle und Übergänge zu erklären, zu beschreiben und rechnerisch abzusichern, **das** gehört zum „**mathematischen Argumentieren und Kommunizieren**", wie es die Richtlinien fordern. Da gibt es nichts auswendig Gelerntes daherzuplappern, sondern Lernende können sich in eigener Regie und wachsender Selbstständigkeit den Fragen und Antworten widmen.

Zur Ausführlichkeit der Lösungen überhaupt Ich hätte in den Lösungen (auch vieler anderer Aufgaben) sehr viel knapper formulieren können, oder gar nur Endergebnisse nennen können. Aber Mathematik lernen nur die wenigsten ganz alleine. Es ist wie in der Musik: obwohl ich schon etliche Jahrzehnte im Orchester und Streichquartett Bratsche spiele, bin ich froh, wenn mir ein Könner zeigt, wie man diese oder jene schwierige Stelle meistert. Genau **das** bringt mich weiter. Zu wissen, wie die Noten heißen und der Rhythmus geht, reicht nicht!