In: Kurven erkunden und verstehen
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 7.2 Raster mit Kreis- und Parallelenscharen

Eine *.pdf-Seite mit den Rasterbildern für Ihre eigenen Eintragungen finden Sie auf der Website im Abschnitt 7.7.

1. Überlegen Sie, dass Sie für Abb. 7.25 a) mit dem roten Strichtyp einen (blauen) Kreis nach außen, aber dafür einen (grünen) Kreis nach innen gehen. Die Summe der Kreisringe nach A und B bleibt also konstant. Überlegen Sie entsprechend für den blauen Strichvorschlag.
2. Überlegen Sie, dass Sie für eine Parabel, für die die blaue Senkrechte Leitgerade sein soll, im Ursprung starten müssen. Erhalten Sie auch Parabeln, wenn Sie andere Diagonalenfamilien verfolgen?
3. Bei dem grünen Zeichenvorschlag geht man immer *zwei* Senkrechten nach außen, aber nur *einen* Kreis. Welche Kurven entstehen?
4. Bei dem blauen Zeichenvorschlag geht man immer *zwei* Kreise weiter, aber nur *eine* Senkrechte. Welche Kurven entstehen?
5. Was passiert, wenn Sie diese beiden Methoden bei dem Doppelkreissystem anwenden?
6. Stellen Sie für jeden Typ eine Gleichung auf. Prüfen Sie sie in GeoGebra.

Hinweis

Der GeoGebra-Befehl für z. B. das Kreissystem ist `Folge[(x - e)^2 + y^2 = k^2, k, 0, 20, 0.5]`. Wenn Sie die Raster selbst erzeugen, können Sie Kurvenvorschläge in GeoGebra direkt prüfen. Bedenken Sie die Abschnitte 7.2.1, 7.2.2 und für den letzten Top auch 4.3.2.Die Rasterbilder zum Ausdrucken und Lösungen sind auf der Website zum Buch. ◀

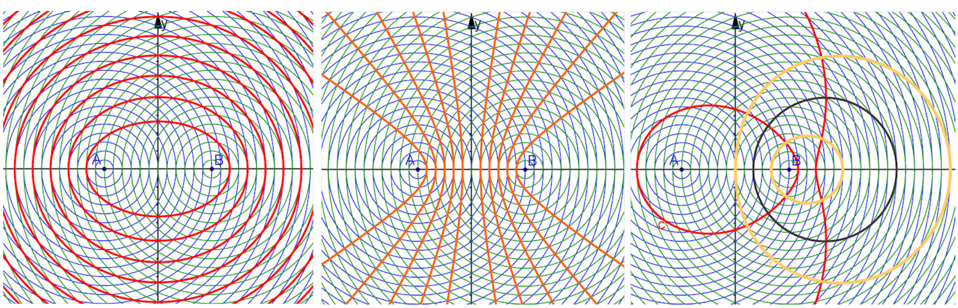

Abb. 7.3 Aufgabe 7.2 Raster mit konzentrischen Kreisscharen
Links: roter Zeichenvorschlag zu a), mitte: blauer Zeichenvorschlag zu a), rechts: Vorschläge von b) im Doppelkreissystem, siehe 5.

Lösung: Zu 1.: Doppelkreissystem a) Man sieht in Abb. 7.3 (hier) links die für konstante Abstandssumme zu erwartenden Ellipsen. Der blaue Strichvorschlag bei a) geht sowohl einen blauen Kreis nach außen als auch einen grünen. Also bleibt der Unterschied der Abstände von A und B konstant. Tatsächlich sieht man in der Mitte von Abb. 7.3 (hier) die Hyperbeln.

In der **Physik** nennt man sie auch „**Interferenz-Hyperbeln**". Sie entstehen, wenn sich die Wellen zweier Schwingungserzeuger überlagern. Stellen Sie sich vor, dass die Kreise abwechselnd Täler und Berge von Kreiswellen bedeuten. Dann findet Verstärkung statt, wenn Tal auf Tal oder Berg auf Berg trifft, aber Auslöschung, wenn Tal auf Berg (oder umgekehrt) trifft. Dreht z. B. man eine angeschlagene Stimmgabel vor dem Ohr, so kann man dieses Interferenzphänomen als „Jaulen" hören.

Herleitung von Gleichungen Wir verwenden die bei der Fadenkonstruktion Abschnitt 7.2.1 auf Seite 186 verwendeten Bezeichnungen. Nun aber ist $A = F_1$ und $B = F_2$. Der Abstand von A sei also r, der von B sei r'.

Bei den Sätzen 7.1 und 7.2 auf den Seiten 186 f wird der Beweis für die Ellipsen- und Hyperbelgleichungen erbracht, wie wir ihn hier brauchen. Das Raster ist mit 1-Abständen gezeichnet. Dann haben die Ellipsen links die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, mit abgezählten $a = 8$ und $b^2 = a^2 - e^2 = 64 - 36 = 28$ für die innere Ellipse.

Die Hyperbel gekrümmteste Hyperbel hat die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit $a = 5$ und $b^2 = e^2 - a^2 = 36 - 25 = 11$.

Zu 5.: Strichvorschläge aus b) im Doppelkreissystem anwenden Für das rote Oval in Abb. 7.3 (rechts) ist rechts neben B das $r = 13$ und $r' = 1$. Der nächste Punkt nach dem blauen Strichvorschlag ist $r = 12$ und $r' = 3$, dann $r = 11$ und $r' = 5$. Hieraus ergibt sich eine lineare Gleichung $r' = -2r + 27$. Die beteiligten Kreise haben allgemein die Gleichungen $(x+6)^2+y^2 = r^2$ und $(x-6)^2+y^2 = (-2r+27)^2$. Nun ist r zu eliminieren. Man bekommt eine Wurzel, die man durch isolieren und quadrieren beseitigen muss und erhält eine Kurve 4. Grades. Wegen der linearen Gleichung in r und r' handelt es sich i.A. um **Descartes'sche Ovale**, wie sie bei den bipolaren Kurven S. 99 und in Aufgabe 4.4 S. 107 erklärt sind.

Für die gelbe Descartes'sche Kurve ist $r' = \frac{1}{2}r + 3$ und Mathematica liefert mit www.wolfram-alpha.com $x^4 + 2x^2\left(y^2 + 216\right) + y^2\left(y^2 + 32\right) = 8x\left(5x^2 + 5y^2 + 144\right)$.

Sind speziell r und r' proportional, erhält man keine Wurzelgleichung, es bleibt beim 2. Grad und damit ist ein Kegelschnitt gesichert. Der schwarze Kreis ist so ein Fall mit $r' = \frac{1}{2}r$ und sogar von Hand hat man bald: $(x - 10)^2 + y^2 = 64$. Bei genauerem Hinsehen ist es bei Proportionalität von r und r' sogar **immer** ein Kreis, denn der x^2-Term und der y^2-Term bekommen in diesem Falle stets denselben Faktor $1 - k^2$.

Zu 2.: Parallelen und Kreissystem, Parabeln Beginnt man im Ursprung mit dem braunem Strichvorschlag, so entsteht die rote Parabel mit dem Scheitel im Ursprung. Das ist schon in Abschnitt 7.2.1 und Satz 7.5 auf Seite 187 bewiesen. Hierfür ist in Abb. 7.4 (links) die dicke blaue Parallele zur y-Achse die Leitgerade, denn die Scheitelgerade halbiert stets die Abstandsstrecke zwischen Brennpunkt und Leitgerade. Es ist klar, dass

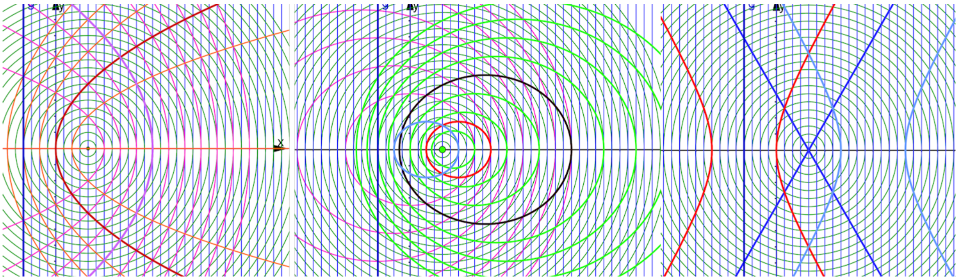

Abb. 7.4 Aufgabe 7.2 mit Parallelen und einer konzentrischen Kreisschar
Links: Parabeln mit braunem und roten Strichvorschlag zu b), mitte: Ellipse mit grünem Strichvorschlag zu b), rechts: Hyperbeln mit blauem Strichvorschlag zu b), siehe dazu hier in der Lösung die Punkte 2, 3 und 4.

man mit anderen Startpunkten für den Scheitel ebenfalls Parabeln erhält, deren Leitgeraden man durch Spiegelung des Brennpunktes am Scheitel findet. Die nach links geöffneten Parabeln ergeben sich durch den roten Strichvorschlag bei b).

Parallelen und Kreissystem, Gleichungen Für die Herleitung der Gleichungen ist $F = (f, 0)$, der Radius der Kreise sein r. Die Parallelen zeigen direkt die Abszisse x des Schnittpunktes zwischen einer Parallelen und einem Kreis an. Die lineare Gleichung zwischen r und x sei $r = k\,x + s$. Dabei ergibt sich der Parameter k aus der Strichvorschrift, explizit sind in Abb. 7.25 (Buch) vorgeschlagen $k = \pm 1$, $k = \pm 2$, wenn es für einen grünen Kreis zwei blaue Parallelen weitergeht, $k = \pm\frac{1}{2}$, wenn es für eine blaue Parallele zwei grüne Kreise weitergeht. Um s und k konkret zu finden, startet man irgendwo, notiert zwei Paare r und x und bestimmt die lineare Gleichung. Dann ist die Gleichung der Kurve

$$(x - f)^2 + y^2 = (k\,x + s)^2.$$

Dieses ist mit Sicherheit eine 2D-Quadrik nach Definition 7.1 Seite 183. Man kann sie direkt in GeoGebra eingeben. Stellt man die Gleichung um, so erhält man $\left(1 - k^2\right) x^2 + y^2 + \cdots$, die Punkte stehen für einen linearen Term in x. Man erkennt daran für $k^2 < 1$ Ellipsen, für $k^2 = 1$ Parabeln und für $k^2 > 1$ Hyperbeln.

Zu 3.: Parallelen und Kreissystem, Ellipsen Beginnt man irgendwo mit dem grünen Strichvorschlag, so erhält man die grünen Ellipsen in Abb. 7.4 (mitte), darunter die kleine rote und die schwarze Ellipse. Für letztere ist $r = \frac{1}{2}x + 6$ die lineare Gleichung und die Ellipsengleichung ist $\frac{3}{4}x^2 - 14x + y^2 = 20$. Üben Sie sich in der Umwandlung in die verschobene Mittelpunktsform und prüfen Sie in GeoGebra. Wie erhält man die violetten Ellipsen?

Zu 4.: Parallelen und Kreissystem, Hyperbeln Mit dem blauen Strichvorschlag und dem Start im Ursprung kommt man auf die rote Hyperbel $3x^2 + 24x - y^2 = 0$. Beim Start im Brennpunkt erhält man das Geradenkreuz aus $r = 2x - 8$ zu $3(x - 4)^2 - y^2 = 0$. Allgemein entsteht ein Geradenkreuz für $s = -k\,f$.