In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 7.3 Konfokale Ellipsen und Hyperbeln

1. Setzen Sie zwei Punkte auf die Zeichenebene und erzeugen Sie mit den passenden Buttons eine Ellipse und eine Hyperbel und realisieren Sie eine „eindrucksvolle“ Bestätigung des Satzes: **Konfokale Ellipsen und konfokale Hyperbeln mit denselben Brennpunkten schneiden sich stets senkrecht.**
2. Es gilt für Ellipsen $b^2+e^2=a^2$ und für Hyperbeln $b^2-e^2=a^2$ nach den Sätzen 7.1 und 7.2. Am Ende von Abschnitt 7.2.1.1 steht schon ein Hinweis, diesen Zusammenhang konstruktiv zu verwerten. Tun Sie das einmal wirklich. Stellen Sie Gleichungen für eine Ellipsenschar und eine Hyperbelschar auf und zeichnen Sie diese mit dem im Hinweis genannten Befehl `Folge`$[\cdots]$. Sind es orthogonale Scharen? Orthogonal heißt: senkrecht aufeinander stehend.
3. Sehen Sie sich die Zeichnungen zur Reflexion 7.12 an und finden Sie eine geometrische Begründung für die Orthogonaltität der Tangenten.
4. Beweisen Sie mit Methoden der Analysis, dass die Tangenten senkrecht stehen.

Hinweis

Im Befehl `Folge[x^2/(e^2-k^2) + y^2/k^2 =1, k, 0,e, 0.5]` müssen Sie unbedingt e als Zahl festlegen, der Befehl verträgt keine weiteren Parameter, auch nicht, wenn sie „außen“ bekannt sind.

Der letzte Beweis geht „von Hand“, wenn man dasselbe b für Ellipse und Hyperbel wählt. Dann ist der Schnittpunkt $\left(\frac{\sqrt{e^4-b^4}}{e}, \frac{b^2}{e}\right)$. (Fehlerteufel: Im Buch ist das Wurzelziehen vergessen worden.) Weiteres finden Sie auf der Website zum Buch. ◀

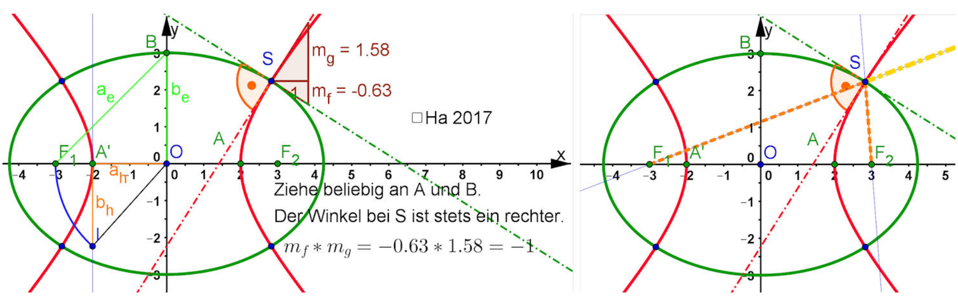

Abb. 7.5 Aufgabe 7.3 Konfokale Ellipsen und Hyperbeln

Lösung: Zu 1. Orthogonalität ansehen *Konfokal*=“mit gemeinsamem Fokus“ soll in dieser Aufgabe heißen, dass **beide Brennpunkte** zusammenfallen. In Abb. 7.5 (hier) wurden zuerst mit $e=\overline{F_1O}$ die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 festgelegt und dann mit völlig frei in die Ebene gesetztem Punkt A mit dem Button „Hyperbel aus Brennpunkten und freiem Punkt“ eine Hyperbel erzeugt, ebenso ging es mit der Ellipse. Mit S und dem Befehl `Tangente[<Kegelschnitt>,S]` sind die Tangenten und ihr Schnittwinkel angezeigt. Umherziehen von A und B ändert nichts an dem Symbol für den rechten Winkel. Das ist durchaus eindrucksvoll. Mit dem Befehl `Steigung[<Gerade>]` findet man die Steigungen m_g und m_f, ihr Produkt ist in jeder Stellung -1, wie es für senkrechte Stellung sein muss.

Zu 2. Beziehungen zwischen den Halbachsen und e Mit dem Befehl `HalbeHauptachsenlänge[ <Kegelschnitt> ]` findet man A_h und entsprechend B_e, im Bild unter der gezeigten Lage von A und B verborgen. Links sind hellgrün und orange die rechtwinkligen Dreiecke mit den geforderten Pythagoras-Beziehungen konstruiert. Die Datei finden Sie auf der Website.

Für die orthogonalen Scharen von Ellipsen und Hyperbeln gibt es bei der Lösung zu Aufgabe 7.2 die GeoGebra-Datei afg7.2-kr-elli-hyp.ggb.

Zu 3. Zusammenhang mit Reflexion In Abb. 7.5 (hier) sehen Sie rechts, dass die Tangenten wechselweise als Einfallslote für die an Ellipse und Hyperbel reflektierten Strahlen dienen. Geometrische Beweise zeigt Abschnitt 7.5.1.

Zu 4. Analysis-Beweise Grundsätzlich ist der Schnittpunkt zweier konfokaler Kegelschnitte zu bestimmen. Das sind dann stets Ellipse und Hyperbel, denn konfokale Ellipsen schneiden sich untereinander ebenso wenig wie konfokale Hyperbeln.

Parabeln kommen hier nicht in Spiel, da sie (im Endlichen) nur einen Brennpunkt haben. In der Lösung zu Aufgabe 7.2 können Sie zwei konfokale Parabelscharen mit gleicher Achse sehen, die sich orthogonal schneiden. Machen Sie sich vielleicht auf, das zu zeigen.

Das auf der Website befindliche Mathematica-Notebook aufgabe7.2-konfokale-conics.nb, das jeder als *.pdf lesen kann, rechnet den allgemeinen Fall vollständig durch. Der dort verfolgte Trick, zunächst mit $zx = x^2$ und $zy = y^2$ zu arbeiten und erst zum Schluss die Wurzeln zu ziehen, bewährt sich.

Hier soll der **Sonderfall**, wie im Hinweis angeregt, betrachtet werden, dass die kleine Halbachse für Ellipse und Hyperbel gleich b ist. Nach den Pythagoras-Beziehungen aus 2. gilt für die Ellipse $a_e^2 = e^2 + b^2$ und für die Hyperbel $a_h^2 = e^2 - b^2$. Wir suchen also einen Schnittpunkt von $\frac{x^2}{e^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $\frac{x^2}{e^2-b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Addition der Gleichungen ergibt unter Verwendung der 3. binomischen Formel für den Hauptnenner $\frac{2e^2}{e^4-b^4}x^2 = 2$. So passt es zu dem (berichtigten) Hinweis. Es folgt $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{e^4-b^4}{e^2(e^2+b^2)} = 1 - \frac{e^2-b^2}{e^2} = \frac{b^2}{e^2}$, also $y^2 = \frac{b^4}{e^2}$. (*Ach, könnte man doch die Wichtigkeit von Binomi 3 vermitteln!*)

Die implizite Ableitung der Ellipse ist $\frac{2x}{e^2+b^2} + \frac{2y\,y_e'}{b^2} = 0$, was im Schnittpunkt $y_e' = -\frac{2\sqrt{e^4-b^4}}{e(e^2-b^2)}\frac{e\,b^2}{2b^2} = \frac{\sqrt{e^4-b^4}}{e^2+b^2}$ zur Folge hat. Entsprechend ist $y_h' = \frac{\sqrt{e^4-b^4}}{e^2-b^2}$ für die Steigung der Hyperbeltangente. Mit $y_e' \cdot y_h' = \frac{\sqrt{e^4-b^4}\cdot\sqrt{e^4-b^4}}{(e^2+b^2)(e^2-b^2)} = -\frac{e^4-b^4}{e^4-b^4} = -1$ ist nun der Schnittwinkel als rechter Winkel gesichert.