In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 7.4 **Konjugierte Richtungen**

1. Zeichnen Sie eine Ellipse und eine Schar paralleler Geraden, die die Ellipse schneiden. Heben Sie die so entstehenden Sehnen als Strecken hervor, verbergen Sie die Geraden. Welche Eigenschaft hat die besondere Sehne *durch alle Mittelpunkte* dieser Sehnenschar? Die besondere Sehne ist ein **Durchmesser der Ellipse**. Passend zu Ihrer ursprünglichen Sehnenschar gibt es einen weiteren Durchmesser, diese beiden heißen **konjugierte Durchmesser**.
2. Die Tangenten an den Enden der konjugierten Durchmesser sind parallel zu dem jeweils anderen Durchmesser.
3. Sehen Sie sich Abb. 4.9 Seite 90 an, dann *verstehen* Sie, dass die konjugierten Durchmesser, die gemittelten Sehnen und die Tangenten aus einem beliebig gelegenen orthogonalen Durchmesserkreuz des Hauptscheitelkreises durch Stauchung hervorgehen. Dieser Zusammenhang wird übrigens meist als Definition für konjugierte Durchmesser genommen. Obiger Zugang ermöglicht für Sie eine *Erkundung*.
4. Wenn Sie die Handlungen von Top 1 für Hyperbeln durchführen, so finden Sie *einen* Durchmesser, aber *keinen zweiten*. Erkunden Sie, in welchem Bereich für Steigungen es Sehnen gibt. Welche Steigungen haben die zur Sehnenrichtung konjugierten Durchmesser? Wie können Sie Top 2 modifizieren?
5. Bei Parabeln liegen die Mittelpunkte einer Schar paralleler Sehnen auf einer Geraden. Sehen Sie sich das in GeoGebra an. Welche besondere Eigenschaft hat diese Gerade? Gibt es eine Erkenntnis zu Tangenten? Welcher Zusammenhang besteht mit der Abb. 7.14 Seite 201 oder mit der Parabelausschöpfung von Archimedes in Abschnitt 6.7
6. Im genannten Abschnitt wird die Begründung des Apollonius erwähnt, der direkt mit Hilfe der Schnitte mit dem Kegel argumentierte. Können Sie sich das vorstellen?

Hinweis

Diese Aufgabe lässt viel Raum zum Erkunden und ist auch für jüngere oder unerfahrene Lernende geeignet. ◀

Lösung: Zu 1.: Erkundung Abb. 7.6 a) zeigt eine Umsetzung der Aufgabenstellung, bei der man an S_e zieht und die Spur des Mittelpunktes der violetten Sehne ansieht. Sie ist ein Durchmesser und orangefarben dick hervorgehoben. Unter den violetten Sehnen gibt es eine, die auch Durchmesser ist, die beiden heißen **konjugierte Durchmesser**. Wenn man die Sehnen mit einbezieht, spricht man von **konjugierten Richtungen**. Das Produkt der beiden Steigungen m und m_k erfüllt die Gleichung $m \cdot m_k = -\frac{b^2}{a^2}$. Ein Beweis dafür folgt am Ende von 3.

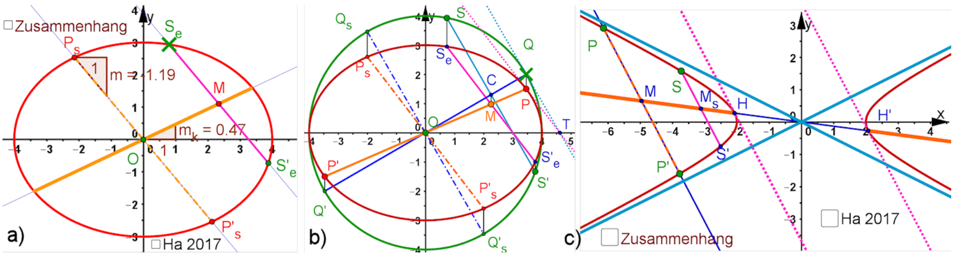

Abb. 7.6 **Aufgabe 7.4 Konjugierte Richtungen** a) Zu 1.: Erkundungsaufgabe, b) Beweise mit der Stauchung aus dem Hauptscheitelkreis, c) Zu 4.: Hyperbel und konjugierte Richtungen

Zu 2. und 3.: Stauchung aus dem Hauptscheitelkreis In Abb. 4.9 auf Seite 90 ist gezeigt, dass man die Ellipse mit den Halbachsen a und b durch Stauchung (Achsensteckung parallel zur Nebenscheitelachse) mit dem Stauchfaktor $k = \frac{b}{a}$ aus dem Hauptscheitelkreis mit dem Radius a erhalten kann. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 7.6 b) dargestellt und liefert eine vollständige Begründung für die Beobachtungen:

Ein beliebiges rechtwinkliges Durchmesserkreuz (blau) des Hauptscheitelkreises ergibt ein i. A. nicht mehr rechtwinkliges Durchmesserkreuz (orange) der Ellipse. Alle zu den blauen Kreisdurchmessern parallelen Kreissehnen haben ihre Mittelpunkte auf den Kreisdurchmessern, das ist klar. Werden die Kreissehnen nun gestaucht, so bleiben die Mittelpunkte weiterhin Mittelpunkte, weil Stauchungen **teilverhältnistreu** sind. Diese Bildmittelpunkte liegen auf sowohl auf den Bildsehnen als auch auf den konjugierten Durchmessern der Ellipse. Damit ist die Beobachtung aus 1. bewiesen.

In 2. geht es um die Tangenten: Für den Kreis ist klar, dass die Tangenten senkrecht auf dem Radius stehen, die gestauchten Tangenten (violett gepunktet) haben mit der zugehörigen Kreistangente (hellblau gepunktet) den Durchgang T durch die Hauptachse gemeinsam. Diese Tangentenkonstruktion ist schon in Abb. 7.13 auf Seite 200 gezeigt. (Sie war ein Thema in meiner eigenen Abiturarbeit 1966.) Da Stauchungen auch **parallelentreu** sind, sie sind affine Abbildungen, ist diese Tangente auch parallel zu den violetten Sehnen.

Beweis der Steigungsformel für konjugierte Richtungen: Sei m die Steigung des Durchmessers $\overline{P_s P_s'}$. Die Frage, welcher Ellipsenpunkt gerade dieses m als Tangentensteigung hat, wird mit der impliziten Ableitung $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot m}{b^2}$ beantwortet. Es folgt für die konjugierte Steigung $m_k := \frac{y}{x} = -\frac{b^2}{m\,a^2}$, also $m \cdot m_k = -\frac{b^2}{a^2}$. Das passt zu der Formel für senkrechte Steigungen $m \cdot m_{senk} = -1$, denn für $a = b$ hat man als spezielle Ellipse einen Kreis und ein rechtwinkliges Durchmesserkreuz.

Zu 4.: Konjugierte Richtungen bei Hyperbeln Abb. 7.6 c) zeigt das dem Bild a) entsprechende Vorgehen. Die durch M und M_s definierte Gerade trifft den Ursprung und die Stecke $\overline{H\,H'}$ kann man als Durchmesser auffassen. Daher spricht man bei Hyperbeln besser von **konjugierten Richtungen**. Die Tangenten – und damit die Sehnen – sind offensichtlich stets steiler als die Asymptoten der Hyperbel, die dazu konjugierten Richtungen sind stets flacher als die Asymptoten.

Probieren Sie aus, welche Ortskurve die Mitten von Sehnen haben, die einen Ast mit dem anderen verbinden.

Als **Steigungsformel für konjugierte Richtungen** kann auf gleiche Art hergeleitet werden: $m \cdot m_k = \frac{b^2}{a^2}$.

Zu 5.: Parabeln In Abb. 7.14 auf Seite 201 wird mit der Scherung begründet, dass es zu eine beliebigen Parabelsehne stets eine zur ihr parallele Tangente gibt, deren Berührpunkt man findet, wenn man eine Parallele zur Parabelachse durch den Mittelpunkt der Parabelsehne mit der Parabel schneidet. In der Sprechweise dieser Aufgabe ist die konjugierte Richtung zu **jeder** Schar paralleler Sehnen eine Parallele zur Parabelachse.Dies sagt auch der obere blaue Kasten auf Seite 200. Unter ihm steht auch ein einfacher analytischer Beweis.

Zu 6.: Diese Erkenntnisse sind sehr alt. Die Parabel-Ausschöpfung des Archimedes (240 v. Chr), wie sie in Abb. 6.12 auf Seite 180 im Buch gezeigt ist, beruht auf dieser Erkenntnis. Der nur wenige Jahre jüngere Apollonius stellt sich die Sehnen und ihre Mittenverbindung schon beim Schneiden des Kegels vor.