In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 7.6 Pol und Polare für die Parabel

Von einem **Pol** A aus legt man Tangenten an einen Kegelschnitt c. Die Verbindungsgerade der Berührpunkte heißt **Polare von** A **bezüglich** c. Umgekehrt kann man jede Gerade, die den Kegelschnitt schneidet, **als Polare auffassen** und den zugehörigen **Pol suchen**.

Konstruieren Sie für eine Parabel zu einem Pol die Polare und zu einer Polaren den Pol. Diese Konstruktionsaufgaben können Sie sich auch für die Ellipse und die Hyperbel stellen.

Hinweis

Bei der **Inversion am Kreis**, der Abschnitt 9.5 gewidmet ist, beantwortet Abb. 9,17 b) die erste Aufgabe, Abb. 9.17 a) die zweite. Lassen Sie sich davon anregen. Der rechte Winkel tritt bei der Parabel zwischen Brennpunkt, einem Punkt der Scheiteltangente und dem Berührpunkt auf, siehe Abb. 7.12 b). Auch hier ist der Thaleskreis nützlich. Auf der Website zum Buch finden Sie die GeoGebra-Dateien. Wählen Sie mit der rechten Maustaste „Navigationsleiste“. Dann können Sie genau verfolgen, wie konstruiert wurde.

◀

Lösung: Diese Aufgabe ist als **geometrische Herausforderung** gedacht. Zu einem Kegelschnitt c und einem *Pol* liefert GeoGebra nämlich mit dem Befehl `Polare[Pol,c]` **sofort die Polare**, und mit `Polare[g,c]` für eine Gerade g, die den Kegelschnitt c schneidet, **sofort den Pol**. Das gilt für Parabel, Ellipse und Hyperbel. Spannend und lehrreich ist aber, dass der Polare-Pol-Zusammenhang als Verallgemeinerung des Tangente-Berührpunkt-Zusammenhangs aufgefasst werden kann. Das wird auch in Abb. 7.9 deutlich wenn man sich vorstellt, der Pol rückte immer näher an die Kurve heran. Dann ginge die Polare in die Tangente über.

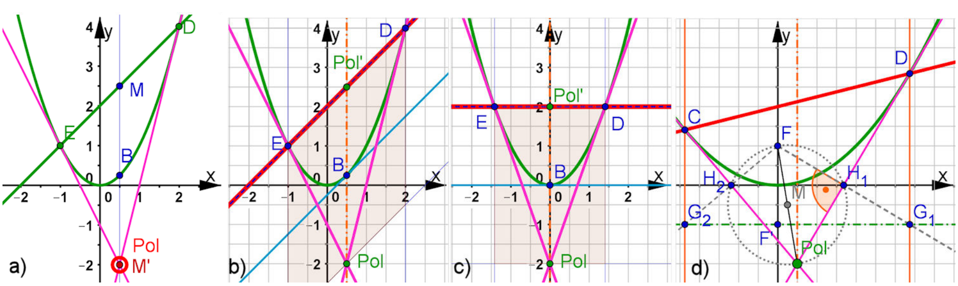

Abb. 7.9 Aufgabe 7.6 Parabeln mit Polare-Pol-Paaren a) Polare gegeben, Pol konstruiert, mit eingebautem Befehl für die roten Kreis, b), c), d) anderes herum, Erklärungen sind im Text. d) ist vollständig konstruiert, ohne Anleihen an der Fähigkeiten von GeoGebra.

Die Beziehung: Pol-Sehnenmitte Im Buch ist Abb. 7.14 auf Seite 201 auf die Scherung verwiesen, mit der man schräge Tagenten in Scheiteltangenten überführen kann. Hier ist in Abb. 7.9 c) in gerader Lage selbstverständlich, dass der Pol an B gespiegelt werden kann und die Polare parallel zur Scheiteltangente ist. In b) ist B der Berührpunkt einer Tangente geworden und der an B gespiegelte Punkt Pol' definiert mit der Tangentenrichtung die Polare.

Die Konstruktionen In a) war die Polare schon gegeben, man musste also nur die Sehnenmitte M an B spiegeln, um den Pol zu finden. Dabei ist B der Schnitt der Parabel mit der orangefarbenen Parallelen zur Parabelachse. Die Tangente in B wurde mit `Tangente[B,c]` erzeugt.

In c), in der die Parabel die Gleichung $y = \frac{1}{2p}x^2$ hat, wurde nun auch diese Tangentenrichtung durch reine Konstruktion gefunden. So ähnlich ist die Konstellation im Buch in Abb. 7.12 auf Seite 198 zu sehen. Der Thaleskreis sorgt für H_1 und den rechten Winkel dort. Dann ergibt sich G_1 auf der Leitgeraden. Die Mittelsenkrechte auf $\overline{FG_1}$ ist Tangente und der Berührpunkt ist ihr Schnitt mit eine Achsenparallelen durch G_1. Ebenso findet man auf der anderen Seite Tangente und Berührpunkt. Die Gerade durch die beiden Berührpunkte ist die gesuchte Polare.

Gleichungen für Polaren In Formel 7.9 im Buch Seite 201 ist für $P_0 = (x_0, y_0)$ als Berührpunkt die **Tangentengleichung** $\frac{x_0\,x}{a^2} \pm \frac{y_0\,x}{b^2=1}$ hergeleitet. **Dieselbe Gleichung** ergibt die Polare, wenn P_0 nicht auf dem Kegelschnitt liegt, $+$ gilt für Ellipsen $-$ für Hyperbeln.

Für Parabel $y = \frac{1}{2p}x^2$ leiten wir für den Pol $P_0 = (x_0, y_0)$ die Polarengleichung direkt her: B hat die Abszisse x_0 und die Ordinate $\frac{x_0^2}{2p}$. Spiegeln wir P_0 an B, dann ersteht $P_0' = \left(x_0,\, 2 \cdot \frac{x_0^2}{2p} - y_0\right)$. Die Steigung in B ist $\frac{x_0}{p}$. Damit ist die zur Tangente in B parallele Gerade durch P_0' nun $y = \frac{x_0}{p}(x - x_0) + 2 \cdot \frac{x_0^2}{2p} - y_0 = \frac{x_0 x}{p} - y_0$, zwei Terme heben sich weg.

Die **Polarengleichung für die Parabel** ist also $y + y_0 = \frac{x_0\,x}{p}$ und das ist zugleich die Tangentengleichung, falls P_0 auf der Parabel liegt.

Bemerkenswerterweise gibt es auch diese Weise auch Polaren, die den Kegelschnitt gar nicht schneiden. Die Gleichungsauffassung erweitert also das ursprünglich geometrische Konzept.

Blick auf die Inversion am Kreis Im Abschnitt 9.5 ist in Abb. 9.17 gezeigt, dass man mit Pol und Polare am Inversionskreis die Kreisspiegelbilder konstruieren kann.

Erfindung von Spiegelung an beliebigen Kegelschnitten Für eine „Parabelspiegelung" müsste das P_0' das Spiegelbild sein. Bei Ellipse und Hyperbel ergibt sich ein Zusammenhang zu den konjugierten Durchmessern der vorigen Aufgabe. Jedenfalls ist es bestimmt interessant, diese Verallgemeinerungen der Kreisspiegelung zu untersuchen.