In: Kurven erkunden und verstehen
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 7.7 Die orthoptische Kurve zur Parabel

Es sei eine Kurve c gegeben, auf ihr ein Punkt A mit Tangente. Konstruieren Sie einen Punkt B auf derKurve c so, dass die Tangente in B die Tangente in A senkrecht schneidet. Der geometrische Ort des Tangentenschnittpunktes P, wenn A auf der Kurve wandert, heißt die **orthoptische Kurve zur Ausgangskurve**. Von allen Punkten dieser Kurve „sieht" ($o\pi\tau\iota\kappa\eta$ *optikè*) man die Parabel unter einem rechten Winkel. Griechisch $o\varrho\theta ó\varsigma$, *orthos*, heißt senkrecht.

Konstruieren Sie die orthoptische Kurve der Parabel.

Hinweis

Bedenken Sie, dass die Sehnen, die auf der Tangente durch A senkrecht stehen, die gesuchte Tangente schon festlegen. Sie können sich das Ergebnis in Wikipedia bei „Parabel" ansehen und natürlich auf der Website zum Buch. ◀

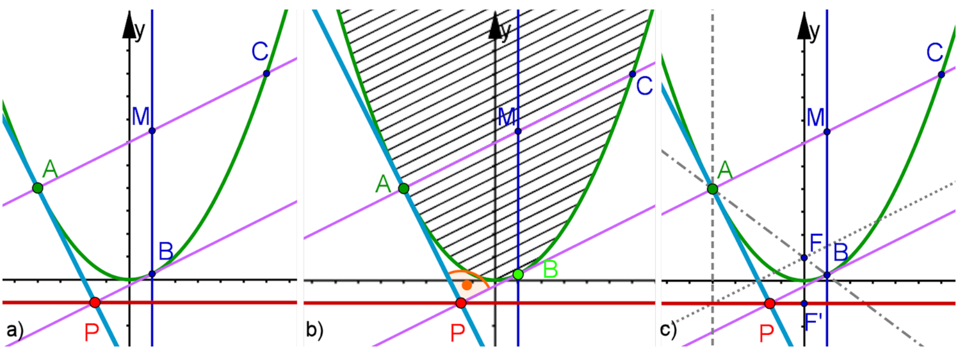

Abb. 7.10 Aufgabe 7.7 Orthoptische Kurve zur Parabel
a) Konstruktion mit der Normalen, b) Zusammenhang mit den konjugierten Durchmessern, c) Begründung mit den geometrischen Parabeleigenschaften und dem Brennpunkt F

Lösung und zusätzliche Betrachtungen Über die gestellte Aufgabe zur Parabeln hinaus werden im Folgenden auch die **orthoptischen Kurven zu Ellipsen und Hyperbeln** konstruiert.

Bemerkenswert ist, dass stets in gleicher Weise die Eigenschaft der **konjugierten Durchmesser** ausgenutzt wird. Zu der gegebenen Tangente wird durch die Normale eine Sehne erzeugt, deren Mittelpunkt mit dem Zentrum O verbunden wird. Dieser konjugierte Durchmesser schneidet den Kegelschnitt in dem gesuchten Punkt B. Die Tangente in B ist parallel zur Sehnenschar und daher orthogonal zur gegebenen Tangente in A. Der Schnittpunkt P der beiden Tangenten ist der gesuchte Punkt der Ortskurve.

Parabel Bei der Parabel gibt es keinen eigentlichen Mittelpunkt. Der zweite Brennpunkt ist im Unendlichen, darum liegen die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf einer Parallelen zur Parabelachse, Abb. 7.10 b) (hier). Damit sind B und dann auch P richtig konstruiert, siehe Abb. 7.10 a) (hier). Zeichnet man die Ortskurve von P, so ist sie eine Parallele zur Scheiteltangente der Parabel, also zur x-Achse. Kurze Überlegung mit Abb. 7.10 c) (hier) zeigt, dass es sich um die Leitgerade der Parabel handelt.

Letzteres zeigt natürlich auch die **rechnerische Herleitung**: Parabel $y = \frac{1}{2p}x^2$, $A = (u, v)$, $B = (s, t)$, Tangenten in A: $y = \frac{u}{p}(x-u)+\frac{u^2}{2p}$, in B: $y = \frac{s}{p}(x-s)+\frac{s^2}{2p}$, Bedingung für senkrecht: $\frac{s}{p} = -\frac{p}{u}$. Tangentenschnitt ergibt mit der 3. binomischen Formel $x = \frac{1}{2}(u+s)$, was man ja auch in Abb. 7.10 c) (hier) sieht. Beides in die Tangentengleichung für A eingesetzt ergibt $y = \frac{u}{p}\frac{1}{2}(-\frac{p^2}{u}+u) - \frac{u^2}{2p} = -\frac{p}{2}$, die Gleichung der Leitgeraden.

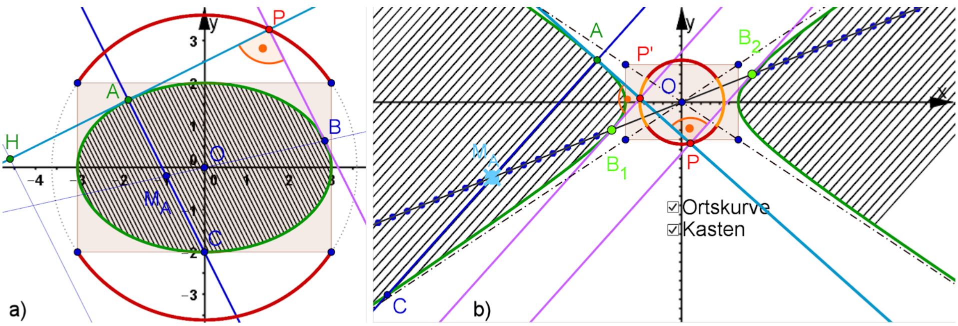

Abb. 7.11 Aufgabe 7.7 Orthoptische Kurven zu Ellipsen und Hyperbeln
a) Die Normale definiert eine Sehenschar, deren kongugierter Durchmesser den Punkt B liefert. Die orthoptische Kurve der Ellipse besteht aus zwei Kreisbögen, b) ebenso erhält man mit der Geraden durch die Sehenmittelpunkte und den Ursprung nun zwei Punkte B_1 und B_2 auf den beiden Ästen. Die Schnittpunkte der Tangenten zu A und B_1 beziehen sich auf den Ast von A, die von A und B_2 auf verschiedene Äste. Die orthoptische Kurve der Hyperbel besteht aus je zwei Kreisbögen, die sich zu einem Kreis ergänzen.

Ellipse Das eingangs beschriebene Vorgehen passt zu Abb. 7.11 a) und konstruiert B und P. Dabei sind die Ecken des umbeschriebenen Rechtecks sichere Punkte der Ortskurve von P. Die Ortskurve ist für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ anscheinend ein Kreis mit dem Radius $a^2 + b^2$, der ersichtlich nur im Intervall `[-a,a]` definiert ist.

Die rechnerische Bestimmung ist wegen der Quadrate sperrig und überfordert Mathematica sogar im konkreten Fall.

Hyperbel Das eingangs beschriebene Vorgehen passt zu Abb. 7.11 b) und konstruiert B und P. Die Ortskurve ist für die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ anscheinend ein Kreis mit dem Radius $a^2 - b^2$, der ersichtlich aus zwei Bogenpaaren besteht. In dem Bereich zwischen den Asymptoten (Gleichung $y = \pm\frac{b}{a}x$), in dem auch die Hyperbeläste liegen, gehen von P auf dem orangefarbenen Kreisbogen aus zwei Tangenten an denselben Ast. Auf den Asymptoten kann P nicht liegen. Von dem anderen Bereich gehen von P auf dem roten Kreisbogen aus die Tangenten an verschiedene Äste. Der Kreis ist, wenn er den zu erwartenden Radius $a^2 - b^2$ hat, der Thaleskreis über der Brennpunktestrecke der korrespondierenden Ellipse.

Die rechnerische Bestimmung ist wegen der Quadrate sperrig und überfordert Mathematica sogar im konkreten Fall.