In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 7.8 Elementare Ortsaufgaben

Die Konstruktionen sprechen eigentlich für sich. Bei Abb. 7.12 b) (hier) ist A ein *fester*

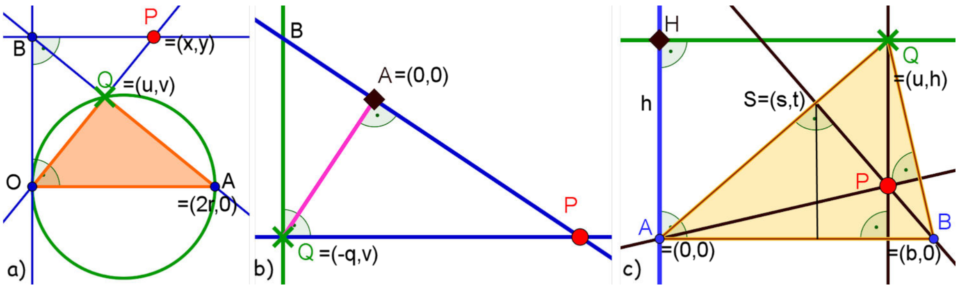

Abb. 7.12 **Orte erkunden,** stets wandert Punkt Q zugfest auf seinem grünen Weg, auf die gezeigte Weise entsteht Punkt P, dessen Ortslinie gesucht ist.

Punkt. In Abb. 7.12 c) (hier) ist P der Schnittpunkt der Höhen. Sehen Sie sich die Ortskurve von P an, wenn Q auf der waagerechten Geraden wandert. Variieren Sie auch die Höhenlage von H. Experimentieren Sie mit anderen besonderen Punkten im Dreieck, z. B. den Schnittpunkten der Winkelhalbierenden. (Diese Aufgaben-Idee habe ich zuerst bei [Weth 1993], später bei [Weigand und Weth 2002] gefunden.

Bauen Sie die Konstruktionen nach. Stellen Sie, wenn Sie mögen, Gleichungen der Ortskurven auf. Probieren Sie weitere Varianten aus. **Die Kegelschnitte sind eine unerschöpfliche Quelle.**

Hinweis

Auf der Website zum Buch finden Sie die Dateien und Aufgabenblätter für Schüler dazu. Die Konstruktionen können Sie sich mit der Navigationsleiste (rechte Maustaste) und „Abspielen“ ansehen. ◀

Lösungen: Die Abb. 7.12 unterscheidet sich von Abb. 7.27 im Buch S. 217 dadurch, dass ein Koordinatensystem gewählt wurde und weitere Bezeichnungen eingefügt worden sind. Die geometrischen Konstruktionen sind koordinatenfrei, aber wenn man auf eine Gleichung hinaus will, sollte man sich für ein vermutlich günstiges Koordinatensystem entscheiden. Zum Kommunizieren eines Beweises brauchen einige Punkte noch Namen. Lehrende sollten m.E. dieses nicht vorgeben, die Wahl ist schon ein erster interessanter Schritt auf dem mathematischen Weg.

Zu Abb. 7.12 a) (hier) Der Weg von Q ist der Kreis $(u-r)^2+v^2=r^2$, aufgelöst und umgestellt $v^2=u\cdot(2r-u)$. Die letzte Gleichung ist auch als direkte Anwendung des Höhensatzes in dem Thaleskreis zu haben. P liegt mit Q aus derselben Ursprungsgeraden, also $\frac{y}{x}=\frac{v}{u}$, was auch eine Strahlensatzbeziehung ist. Wir nehmen daraus $u=\frac{v\,x}{y}$. Eine andere Strahlensatzbeziehung mit dem Dreieck OAB und Q ergibt $\frac{v}{y} = \frac{2r-u}{2r}$. Der Zähler des letzten Bruches ist oben schon vorhanden, zusammengeführt folgt $v^2 = \frac{vx}{y} \cdot \frac{2rv}{y}$. Man kann v^2 aus dieser Gleichung kürzen und erhält $y^2 = 2r\,x$. Das ist die **Standard-Parabelgleichung**, mit $r = p$, dem Parabelparameter.

Damit liegt der Brennpunkt F der Parabel in der Mitte zwischen dem Kreismittelpunkt und dem Ursprung. Eine geometrische Herleitung scheint nicht erfolgversprechend zu sein.

Zu Abb. 7.12 b) (hier) Die Steigung der violetten Geraden ist $m_{AQ} = -\frac{v}{q}$. In der Zeichnung ist q positiv, v negativ, die Steigung der violetten Strecke positiv, das passt. So testet man, ob die Vorzeichen richtig sind. Die dazu senkrechte Steigung ist $m_{AP} = \frac{q}{v}$. Die Gerade AP mit der Gleichung $y = \frac{q}{v}x$ schneidet die untere waagerechte Gerade $y = v$ in $y = \frac{q}{y}x$, also ist die Ortskurve $y^2 = q\,x$, eine **Standardparabel** mit dem Parameter $p = \frac{q}{2}$. Auch hier bietet sich keine geometrische Herleitung an.

Zu Abb. 7.12 c) (hier) Die Strategie ist es, zur Geraden OQ eine senkrechte Gerade durch B zu finden und deren Schnittpunkt in Abhängigkeit von u zu schreiben. Dann wird der Strahlensatz mit Zentrum B auf die Ortskurve führen. Dabei werden x und y nur für Objekte benutzt, auf denen P wirklich liegt, sonst verlöre man leicht den Überblick.

Gerade OQ: $t = \frac{h}{u}s$, die Gerade BS ist dann $t = -\frac{u}{h}(s-b)$ und es ergibt sich $s = \frac{u^2 b}{h^2+u^2}$ und $t = \frac{hub}{h^2+u^2}$. Der Strahlensatz mit senkrechten Parallelen bringt nun $\frac{t}{y} = \frac{b-s}{b-x}$. Einsetzen unter Verwendung von $x = u$ ergibt $\frac{hxb}{(h^2+x^2)y} = \frac{b(h^2+x^2)-x^2 b}{(h^2+x^2(b-x)}$. Es fällt viel fort und es bleibt $y = \frac{1}{h}x(b-x)$, eine **Parabel** in der üblichen Schreibweise mit den Nullstellen 0 und b

Die wichtigen Dreieckspunkte, sonst wie in c) Man kann die Datei von c) einfach abwandeln und als P den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, der Seitenhalbierenden oder der Mittelsenkrechten wählen. In zweien der drei Fälle kann man ganz einfach die Ortskurve begründen. Im einem Fall wird sie von GeoGebra natürlich gut gezeichnet, aber eine Rechnung ist sehr sperrig, ich habe eine Parameterdarstellung gefunden , die sehr unübersichtlich ist und sich somit nicht lohnt. Es gibt noch mehr besondere Punkte im Dreieck, es ergibt sich ein weites Feld.

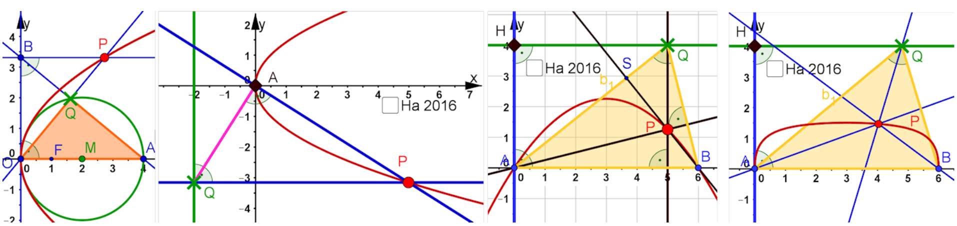

Abb. 7.13 Lösungen der Ortsaufgaben Ergänzt sind die Winkelhalbierenden. Ergänzen Sie selbst für die Seitenhalbierenden und die Mittelsenkrechten.