In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 7.9 Quadrat im Dreieck und Weiteres

Konstruiere in einem beliebigen Dreieck ein Quadrat, das auf einer Dreiecksseite steht und mit den anderen Seiten genau einen Punkt gemeinsam hat, siehe Abb. 7.14 b) (hier).

Hinweis

Diese Aufgabe war bis in die 90er Jahre üblich im Geometrieunterricht zum Thema Ähnlichkeit und Strahlensätze. Statt des Quadrates kann es auch ein einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck sein. Heute ist es möglich, an Q zu ziehen und das Wachsen des Quadrates zu beobachten. ◀

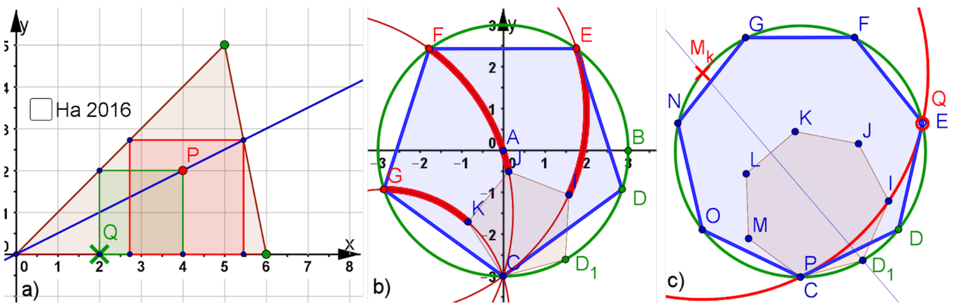

Abb. 7.14 Streckungs-Ortskurven Ergänzt sind eine 5-Ecks-Erkundung und eine 7-Ecks-Konstruktion unter Verwendung des **n-Eck-Buttons**

Lösung mit weiteren Fragestellungen Reizvoll ist die Aufgabe, ohne irgendwelche Berechnungen in einen gegebenen Kreis (ohne Kenntnis des Mittelpunktes) ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, das seine Ecken auf dem Kreis hat. In GeoGebra gibt es einen Button, bei dem ein **regelmäßiges n-Eck** durch Angabe von zwei benachbarten Eckpunkten und Eingabe von n erzeugt wird.

Ergebnis: **Mit Zirkel, Lineal und n-Eck-Button kann jedem Kreis ein n-Eck einbeschrieben werden.**

Erkundung mit dem 5-Eck In Abb. 7.14 b) (hier) ist mit den Punkten C und D auf dem Kreis ein kleines 5-Eck gezeichnet und (für die Herstellung der Abbildung) ein weiteres mit D_1 dicht bei D. Zieht man nun an D und lässt die drei verbleibenden Eckpunkte ihre Spur zeichnen, bis alle Ecken auf dem Kreis liegen, so hat man handwerklich die Aufgabe gelöst.

Wählt man den Button *Ortslinie* für diese Ecken bei Bewegung von D, so hat es den Anschein, als seien die Ortslinien Kreise. Das kann man zeichnerisch bestätigen, indem man mit dem Button *Kreis aus 3 Punkten*, z. B. mit C, I und E, einen Kreis erzeugt.

Er liegt auf der Ortslinie. Sein Mittelpunkt, den wir mit `Mittelpunkt[<Kreisname>]` beschaffen, liegt auf dem grünen Kreis. Der Beweis steht unten.

***Echte* Konstruktion mit dem 7-Eck** In Abschnitt 6.4.1 im Buch ist zu lesen (und auch bewiesen), dass das regelmäßige 7-Eck nicht mit Zirkel und Lineal allein konstruierbar ist. Daran kann man nicht rütteln. Aber wir haben hier eine kräftige Werkzeugerweiterung: GeoGebra beschafft durch interne Rechnungen das 7-Eck. Was *nun noch* von uns gemacht wird, geht mit Zirkel und Lineal allein.

Zuerst konstruieren wir mit der Mittelsenkrechten auf CI den Mittelpunkt des roten Kreises durch Schnitt mit dem grünen Kreis (Beweis unten). Dann zeichnen wir den roten Kreis und bringen ihn mit dem grünen zum Schnitt und erhalten Q. Wenn wir nun D so ziehen, dass E auf Q fällt, haben wir das 7-Eck. Wir könnten aber auch mit der Mittelsenkrechten von $\overline{QC}$ die Stellung von D exakt konstruieren.

Der Mittelpunkt M_k des Wanderkreises von C' liegt stets auf dem Ausgangskreis Diese Aussage bezieht sich auf die Startsituation in der eben beschriebenen 7-Ecks-Konstruktion. Sie gilt aber nicht nur für für die Innenwinkel von 5-Eck und 7-Eck, sondern für jeden Winkel α, siehe Abb. 7.15 (hier).

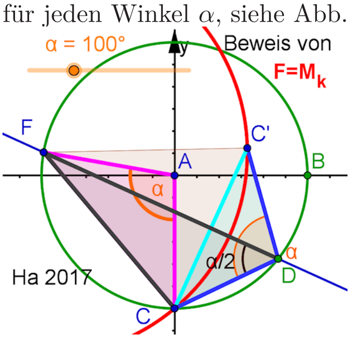

Abb. 7.15 Drachen am Start für die Streckung der n-Ecke Ein Drachen habe den Winkel α, der von seiner Symmetrieachse halbiert wird. Zu einem gegebenen Kreis (grün) wird nun ein Drachen konstruiert, dessen Symmetrie-Diagonale und zwei seiner i.A. verschiedenen Seiten Sehnen im gegebenen Kreis sind, siehe Abb. 7.15 (hier). Beim Ziehen des Scheitels von α wandert die vierte Ecke C' des Drachens auf einem Kreis (rot) um das andere Ende der Diagonale. Durch Schnitt dieses Kreises mit dem gegebenen Kreis kann dann ein **einbeschriebener Drachen** konstruiert werden.

Beweis Auf den gegeben Kreis werden C und D gesetzt und der über einen Schieberegler gegebene Winkel α angetragen. GeoGebra setzt dabei C' so, dass $\overline{DC} = \overline{DC'}$ ist. Die Mittelsenkrechte von $\overline{CC'}$ schneidet den gegebenen Kreis in F. Damit existiert der rote Kreis und zu zeigen bleibt, dass auf ihm C' wandert, wenn D auf dem Kreis wandert: Über der Sehne FC ist der Umfangswinkel (Peripheriewinkel) $\angle FDC = \frac{\alpha}{s}$. Es ist der zugehörige Mittelpunktswinkel also das gegebene α. Über der festen Sehne FC sind nach dem Umfangswinkelsatz sind die Umfangswinkel auf derselben Seite der Sehne alle gleich groß, das heißt hier, dass alle Drachen, die sich beim Ziehen von D ergeben (mathematisch) ähnlich sind, dazu gehört auch der Drachen, bei dem C' auf dem Kreis liegt.

Wenn α der Innenwinkel eines n-Ecks ist, ist das dem grünen Kreis einbeschriebene n-Eck mit dem Button „Regelmäßiges Vieleck“ bei Eingabe von n erzeugt.

Folgerung Durch Antragen von α an $\overline{AC}$ kann man auch gleich F und mit dem Durchmesser FA dann D_n konstruieren. Hierzu finden Sie auf der Website ein animiertes Bild mit GeoGebra-Datei. Achtung: das Antragen von beliebigen Winkeln gilt **nicht als Konstruktion mit Zirkel und Lineal** im strengen Sinn. Siehe Kapitel 6.