In: Kurven erkunden und verstehen
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.1.2 Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben

Aufgabe 9.1 Sluze-Konchoiden als Fußpunktkurven der Parabel?
Den Konchoiden des Baron de Sluze ist der Abschnitt 5.2.2 gewidmet. Hat [Kuno Fladt 1962, S. 385] recht, wenn er behauptet, die Sluze-Konchoiden seien Fußpunktkurven der Parabel?

Hinweis
Schreiben Sie die in Abb. 5.8 (Buch, S. 143) angegeben kartesische Gleichung so um, dass die Schlaufen nach links zeigen. Beachten Sie als Hilfe die einleitend vorgeschlagene Vorgehensweise. ◀

Lösung, gedrehte Sluze-Kurven Tausch von x und y ergibt $(x-b)(x^2+y^2) = a\,x^2$. Wir setzen $c := a$, damit es nicht zu Namenskonflikten kommt, und fassen die die x^2-Terme zusammen. Dann ist $(x-b-c)x^2 = (b-x)y^2$ die allgemeine Gleichung für die Sluze-Kurven mit den Schlaufen nach links, der Asymptote $x = b$, dem Scheitel $S = (b+c, 0)$ und dem Doppelpunkt im Ursprung.

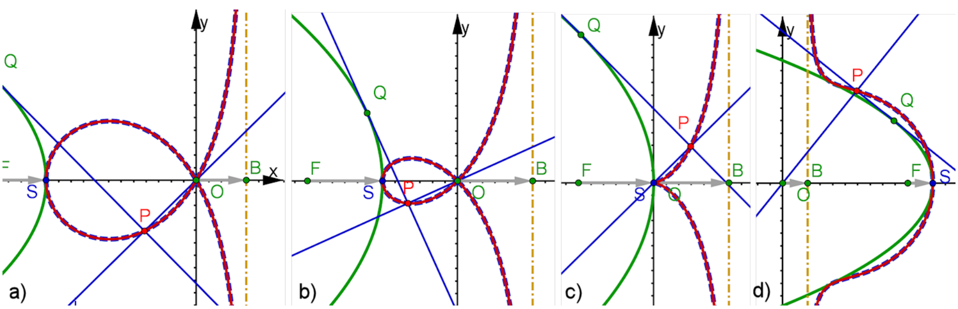

Abb. 9.1 Aufgabe 9.1 Sluze-Kurven als Fußpunktkurven a) Trisektrix $b = 2,\ c = -8$, b) Strophoide $b = 3,\ c = -6$, c) Cissoide des Diokles $b = 3,\ c = -3$, d) Sluze-Kurve auf der anderen Seite der orangefarbenen Asymptote $b = 1,\ c = -5$. Siehe Abb. 5.8 Seite 143 im Buch.

Verschobene Fußpunktkurven der Parabel In Gleichung 9.3 auf Seite 258 im Buch ist das schon vorbereitet. Vergleichen wir also $(a+x)x^2 = (\frac{p}{2} - x)y^2$ mit der Sluze-Gleichung von eben, so sehen wir, dass wir setzen müssen $a := -(c+d)$ und $\frac{p}{2} := b$, damit die Gleichungen übereinstimmen. Die Parabel ist natürlich dann auch nach links verschoben und hat die Gleichung $y^2 = -2p(x-b-c)$.

Weitere Zusammenhänge Da in Abschnitt 5.2.2, incl. Aufgabe 5.5, schon gezeigt ist, dass die klassischen Kurven Trisektrix, Strophoide und Cissoide des Diokles spezielle Baron de Sluze - Kurven sind, erkennen wir nun in Abb. 9.1 a), b) und c) (hier) diese Kurven.

Da der Brennpunkt die Entfernung $\frac{p}{2}$ vom Scheitel S hat und die Asymptote den Abstand $b = \frac{p}{2}$ tritt in der Abb. 9.1 (hier) der graue Vektor zweimal auf. Der Parabelparameter p bestimmt also unmittelbar die Stellung der Asymptote. Bei der Cissoide des Diokles ist die Leitgerade der Parabel die Asymptote.

Weitere Berührung der Parabel Die Fußpunktkurve einer Parabel liegt stets ganz auf der konvexen Seite der Parabel, denn alle Tangentenpunkte liegen allenfalls auf dem Parabelgraphen, sonst außerhalb. Rechts von der Asymptote sieht man in Abb. 9.2 bei festem b für wachsende c zunächst einen schlanken Bogen, der dann aber eine Einbuchtung bekommt und wie ein Knauf aussieht. Hierbei wird die Parabel $y^2 = -4p(x - b - c)$ außer am Scheitel nochmals berührt. Dadurch können wir den Berührpunkt bestimmen: $(x - b - c)x^2 = (b - x)(-4b(x - b - c))$. Diese Gleichung wird, außer vom Scheitel, für $x = 2b$ gelöst, die zugehörigen Ordinaten erfüllen $y^2 = 4b(c - b)$. Diese gibt es nur für $c > b$.

Bei festem c kann man sich für kleiner werdende b ansehen, wie sich die Kurve zwischen einen Kreis und die y-Achse klemmt. Es ist der Kreis, den man für $b = 0$ erhält: $(x-c)x^2 = (0 - x)y^2$, also $\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$. Diese Zusammenhänge sind in Abb. 9.2 dargestellt.

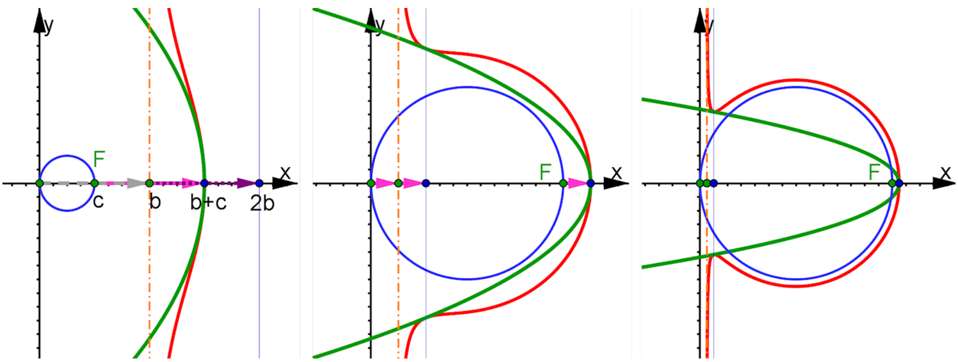

Abb. 9.2 **Aufgabe 9.1 Fußpunktkurven der Parabel, rechts der Asymptote]** a) $b = 8,\ c = 4$, b) $b = 2,\ c = 12$, c) $b = 0.5,\ c = 12$, animierte Version ist auf der Website,