In: **Kurven erkunden und verstehen**
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

## 9.4.2.4 Nephroide, Weiterführungen und Aufgaben

**Aufgabe 9.10 Kaustik der Kardioide ist die Nephroide**
Es gibt eine überraschende Verwandtschaft zwischen Kardioide und Nephroide. Die Aufgabe ich neben Abb. 9.19 (hier) formuliert.

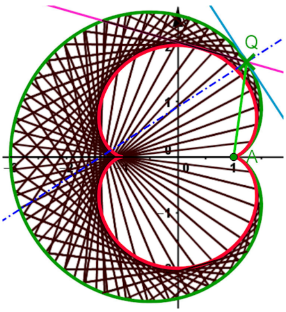


**Abb. 9.19 Eine Kaustik der Kardioide ist die Nephroide**
**Aufgabe:** Zeichnen Sie eine Kardioide als Parameterkurve nach Gleichung 9.16 ohne das $+a$. Konstruieren Sie zu einem zugfesten Punkt $Q$ Tangente und Normale. Das Bild der Geraden $AQ$ bei Spiegelung an der Normalen ist der reflektierte Strahl. Auf ihm definieren Sie eine Strecke, deren Spur die Nephroide zum Vorschein bringt. Raten Sie die Nephroidengleichung und prüfen Sie durch Einzeichnen. Wenn Sie mögen, leiten Sie die Gleichung her. Die unteren Strecken erhält man durch Spiegeln der oberen an der x-Achse.

**Lösung** Im Bild neben der Aufgabenstellung sind die zunächst geforderten Taten verwirklicht. Wie immer ist die zugehörige GeoGebra-Datei auf der Website. In der genannten Parameterdarstellung $x(t) = \frac{a}{3}\left(2\cos(t) - \cos(2t)\right)$ und $y(t) = \frac{a}{3}\left(2\sin(t) - \sin(2t)\right)$ ist der Parameter $t$ der Winkel, den die positive x-Achse mit $AQ$ bildet. Damit ergibt sich die Spitze zu $A = (\frac{a}{3}, 0)$ und der linke Scheitel in dem Bild ist $(-a, 0)$.

**Geratene Nephroide** Bei Nephroiden ist der Durchmesser durch die Spitzen $2a_n$ und der durch die Scheitel $4a_n$. Die implizite kartesische Gleichung der Nephroide, wie sie in der Aufgabe 9.8 zur Evolute hergeleitet wurde, ist
$4a_n^6 + 3a_n^4\left(5x^2 - 4y^2\right) + 12a_n^2\left(x^2+y^2\right)^2 = 4\left(x^2+y^2\right)^3$. Hier ist ersichtlich $a_n = \frac{a}{3}$.
In Abb. 9.19 (hier) ist sie in Rot eingetragen.

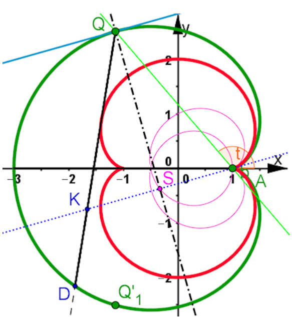


**Abb. 9.20 Aufgabe 9.10 Nephroide als Kaustik der Kardioide**
In GeoGebra ist mit dem Tangenten-Button und dem für Senkrechtenkonstruktion, der Spiegelung von $AQ$ an der Senkrechten und der Spur auf der gespiegelten Geraden schon alles getan.
Die **Idee für einen rechnerischen Beweis** ist folgende: Zu $Q$ auf der Kardioide werden die Tangentensteigung und die Gleichung der Normalen, die als Einfallslot dient, bestimmt. Das Lot von A auf die Normale hat den Fußpunkt $S$, die Spiegelung von $A$ an $S$ liefert $K$. Die Schar der Geraden $QK$, oder Ausschnitte davon, erzeugen als Hüllkurve die Nephroide. Siehe Abb. 9.21 (hier)

**Tangenten und Normale in $Q$** Die imlizite kartesische Gleichung der abgebildeten Kardioide ist $(a-3x)^3(a+x) + 18(a^2-3x^2)y^2 = 27y^4$. Man erhält sie mit der üblichen, in den vorigen Aufgaben beschriebenen, Substitution und Elimination. So lässt sich die Kardioide schnell zeichnen, aber für unser Vorhaben ist die Parameterdarstellung praktischer. Mit $m(t) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ kommen wir zu $m(t) = \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{-\sin(t)+\sin(2t)}$, das mit FullSimplify von Mathematica zu $m(t) = \tan(\frac{3t}{2})$ vereinfacht wird. Die Normale in $Q$, das Einfallslot, ist daher $nor(t) = -\cot(\frac{3t}{2})(x - x(t)) + y(t)$.

**Die Spiegelung** Das Lot von $A$ auf die Normale ist offenbar parallel zur Tangente in $Q$ und hat daher die Gleichung $lot(t) = m(t)(x - 1)$. Für den Schnitt von Lot und Normale muss man wieder trigonometrisch auflösen und substituieren. Es ergeben sich nach FullSimplify und Rücksubstitution $xs = \frac{1}{6}a(\cos(t) + \cos(2t) - \cos(3t))$ und $ys = \frac{1}{6}a(\sin(t) + \sin(2t) - \sin(3t))$, Formeln von eindrucksvoller Eleganz. In der Mathematica-Datei (und ihrer*.pdf) auf der Website können Sie alles ausführlich verfolgen. Mit Eliminate anstelle von Solve bekommt man „gratis" die Kurve dieses Lotfußpunktes, die auch in Abb. 9.20 (hier) violett eingezeichnet ist.

**Nun bestimmen wir** $K$: Als Mitte der Strecke $\overline{AK}$ gilt $xs = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3} + xk\right)$ und $ys = \frac{yk}{2}$. Damit kann $K = (xk, yk)$ unmittelbar bestimmt werden. Die Gerade $QK$ hat so die Gleichung $f(x) = \frac{y(t)-yk}{x(t)-xk}(x - xk) + yk = -\frac{2}{3}a\sec(2t)\sin(t) + x\tan(2t)$

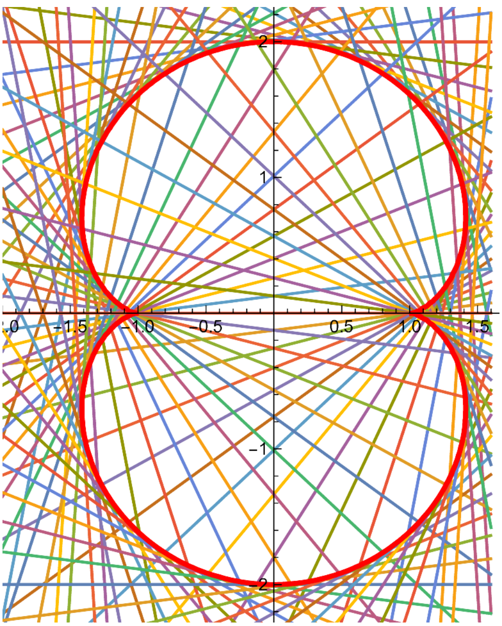


**Abb. 9.21 Aufgabe 9.10 Die reflektierten Strahlen** Wenn Stahlen von $A$ ausgehen und innen an der Kardioide reflektiert werden, bilden die reflektierten Strahlen als Katakaustik (Brennlinie bei Reflexion) ein Nephroide, deren Parameter $a_n$ den Parameter $a$ der Kardioide drittelt.
Hier sind 100 Spiegelgeraden durchgehend von Mathematica gezeichnet, aus obigem $f(x)$ ist eine Tabellen für $t$ von 0 bis $2\pi$ in Schritten von $\frac{\pi}{50}$ erstellt. Die oben genannte Nephroide, die sich im Folgenden auch rechnerisch ergibt in rot eingezeichnet.

**Die Hüllkurve ist die Nephroide** Nach Abschnitt 9.2.2.2 S.267 im Buch leiten wir $y = f(x)$ nach $t$ ab. Das ergibt $0 = \frac{1}{3}(6x - 3a\cos(t) + a\cos(3t))\sec(2t)^2$. Mit der Geradenschar und schon üblichen Substitution und Eliminate erhalten wir $4a^6 + 972a^2(x^2 + y^2)^2 + 27a^4(-4x^2 + 5y^2) = 2916(x^2 + y^2)^3$. Wenn wir in der oben genannten Gleichung der Nephroide für $a_n$ das $\frac{a}{3}$ einsetzen, erhalten wir genau dieselbe Gleichung.