In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.4.2.4 Nephroide, Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 9.11 Analysisfragen bei der Nephroide

Wie schon bei Astroide und Kardioide lassen sich auch bei der Nephroide Flächen und Bogenlänge berechnen. Weisen Sie für die Nephroide mit dem Grundkreisradius a das Folgende nach:

1. Die Fläche der Nephroide ist $A = 3\pi a^2$. Die „Möndchen“ außerhalb des hellblauen Grundkreises in Abb. 9.14 sind so groß wie der Grundkreis.
2. Die Bogenlänge der Nephroide ist $L = 12a$, das sind *drei* Grundkreis-Durchmesser auf jeder Seite.
3. Die Strecke $\overline{PQ}$ ist aufgrund der definierenden Zusammenhänge der Krümmungsradius $\varrho(t)$. Weisen Sie $\varrho(t) = |\frac{3a}{2}\sin(t)|$ nach.

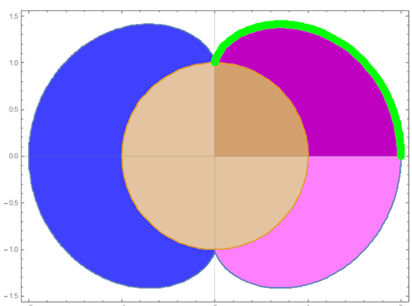

Abb. 9.23 Aufgabe 9.11 Nephroide und Analysis
Es ist a der Radius des Kreises.
Zu1.: Das dunklere Viertel im 1. Quadranten wird unten durch ein Parameterintegral berechnet.
Der blaue und der violette Mond haben jeder die Fläche $a^2\pi$ des Kreises.
Zu 2.: Auch die Bogenlänge wird auch auf Grundlage der Parameterdarstellung berechnet. Jedes Möndchen hat außen einen Rand der Länge $6a$, das sind drei Grundkreisdurchmesser.
Zu 3. gibt es unten die Abb. 9.24 (hier).

Lösung zu 1., Flächen Wie bei den vorigen Aufgaben zur Nephroide wird die Parameterdarstellung verwendet: $x(t) := \frac{a}{2}(3\cos(t) + \cos(3t))$ und $y(t) := \frac{a}{2}(3\sin(t) + \sin(3t))$ aus Gleichung 9.18 auf S. 281 im Buch. Zur Bedeutung des Parameters gibt die Lösung zu Aufgabe 9.8 die Abb. 9.15 (hier). Damit ist klar, dass wir die Fläche mit Formel 11.19 aus $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dot{y}\cdot x\; dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cdot\dot{x}\; dt$ berechnen können. Die erste Art ist hier günstiger. $A = 4\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos(t) - 3\cos(3t))\cdot(3\cos(t) + \cos(3t))dt = 3a^2\pi$.

Klar *kann* man das auch „von Hand“ rechnen, mit mehrfachen partiellen Integrationen und Substitutionen oder, nach einigen Umformungen, dem Nachsehen in einer Formelsammlung, etwa dem Bronstein. Es kann mir aber niemand erklären, dass die dafür eingesetzten Stunden einen „höheren Wert“ haben, zumal die Formelsammlung ja letzten Endes nur ein „verschriftlichter Computer“ ist.

Lösung zu 2., Bogenlänge Für die Bogenlänge greift die Formel 11.15 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$. Betrachten wir den Radikanden: $\frac{a2}{4}\cdot 9\,(-\sin(t) - \sin(3t))^2 + \frac{a^2}{4}\cdot 9\,(\cos(t) + \cos(3t))^2 = 9a^2\cos(t)^2$, das liefert Mathematica mit FullSimplify. Daraus kann man im Kopf die

Wurzel ziehen, insgesamt folgt für die ganze Bogenlänge $s = 4 \cdot 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ dt = 12a$, wie behauptet.

Lösung zu 3., Krümmungsradius Wir greifen auf Aufgabe 9.8 zur Evolute der Nephroide zurück. Eine Evolute ist ja nicht nur die Hüllkurven der Normalenschar, sondern auch der Ort der Krümmungskreismittelpunkte. Zudem haben wir in der genannten Aufgabe bewiesen, dass P die Mitte zwischen Q und dem einen Schnittpunkt der Normale mit dem Grundkreis ist. Von dort holen wir nun die Koordinaten von P. Sie heißen in der Mathematica-Datei afg9.8-nephroide-evolute.nb (oder *.pdf) $xm1$ und $ym1$. Es ist also $xm1 = -\frac{1}{4}a(\cos(3t) - 3\cos(t))$ und $ym1 = a\sin(t)^3$. Das Abstandsquadrat von Q und P ist $qp = \sqrt{(xm1 - x(t))^2 + (ym1 - y(t))^2} = |\frac{3a}{2}\cos(t)|$.

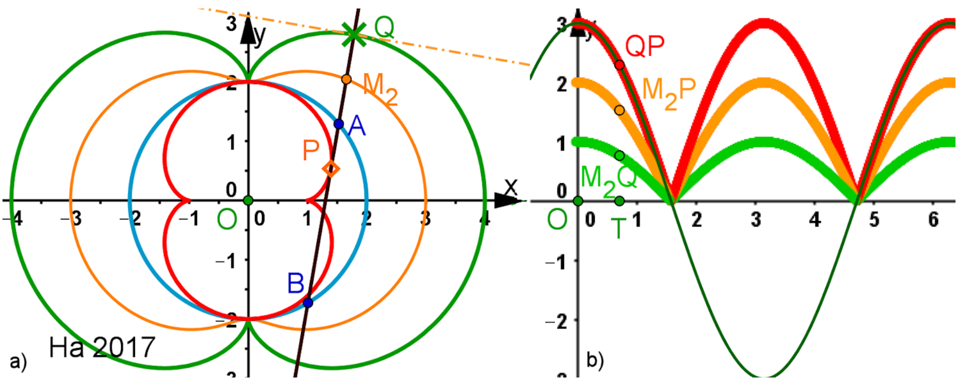

Abb. 9.24 **Kleine Nephroide als Mittenort und Abstände** a) Die Normale in Q schneidet den Grundkreis in A und B. Die Mitte von $\overline{QB}$ hat auch die halb so große aufrechte Nephroide als Ortskurve.
b) Weitere Erkenntnisse ergeben sich aus Aufgabe 9.11. Der Abstand $\overline{QP}$ ist $|\frac{3}{2}\cos(t)|$, zusammengesetzt aus $\overline{M_2Q} = |\frac{1}{2}\cos(t)|$ und $\overline{M_2P} = |\cos(t)|$. Dieses ist im 2. Grafikfenster dargestellt.

Diese Abb. 9.16 steht auch in der Lösung zu Aufgabe 9.8 zur Evolute der Nephroide. Dort wurde die Mitteneigenschaft bewiesen. Der Abstand $\overline{QP} = \frac{3}{2}|a\cos(t)|$ ist das erwartete Ergebnis, wenn die Nephroide waagerecht liegt und die Evolute senkrecht. Denn für $t = 0$ kommt der größte Abstand zustande, mit wachsendem t fällt er bei $t = \frac{\pi}{2}$ auf 0.

In der Aufgabe steht , der Abstand sei $\frac{3}{2}|a\sin(t)|$. Dabei ist offenbar die aufrechte Form für die Ausgangs-Nephroide gemeint, die eine waagerechte Nephroide als Evolute hat. Mit deren Parameter $\hat{t}$ beginnt der Abstand mit 0 und wächst auf $\frac{3}{2}a$ für $\hat{t} = \frac{\pi}{2}$. Formal ist, wie auf Seite 281 ausgeführt, $\hat{t} = t - \frac{\pi}{2}$ und damit $|\cos(t)| = |\cos\left(\hat{t}\right) + \frac{\pi}{2}\big)| = |\sin(\hat{t})|$.