In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.5.6 Inversion von Kurven als Aufgaben

Aufgabe 9.12 **Inversion an einem Scheitel von Ellipse und Hyperbel**
Die allgemeine Scheitelgleichung der Kegelschnitte in einer x-Achsen-symmetrischen Lage und dem Scheitel in $M = (m, 0)$, bzw. im Ursprung ist gemäß Gleichung **??**:

$$y^2 = 2p(x-m) - (1-\varepsilon^2)(x-m)^2 \quad \text{bzw.} \quad y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2 \tag{9.8}$$

Bauen Sie mit Schiebereglern für p und ε Urbilder gemäß der rechten obigen Gleichung 9.8 und invertieren Sie mit dem Button für die Kreisspiegelung. Stellen Sie eine Vermutung an, um welche Kurvenfamilie es sich handelt. Ist es die in Abb. **??** oder die aus Abb. **??**? Leiten Sie eine Gleichung der Inversionsbilder her. Denken Sie über die Asymptoten und den Definitionsbereich für x bei der Bildkurve nach.

Hinweis
Gleichung der Inversionsbilder ist $(c-x)y^2 = x^2(x + c(\varepsilon^2 - 1)$ mit $c = \frac{k^2}{2p}$. ◀

Lösung Für die Inversion an einem Ursprungskreis mit dem Radius k sind nach Gleichung 9.22 auf Seite 291 im Buch die Ersetzungen vorzunehmen:
invert $= \left\{x \to \frac{k^2 x}{x^2+y^2}, y \to \frac{k^2 y}{x^2+y^2}\right\}$. Nach Beseitigung der Nenner $x^2 + y^2$ kann man erhalten
$\epsilon^2 \left(k^2 x - m\left(x^2+y^2\right)\right)^2 = \left(x^2+y^2\right)\left(k^4 - 2k^2 x(m+p) + m(m+2p)\left(x^2+y^2\right)\right)$. So ist das nicht übersichtlich, aber in dem Sonderfall $m = 0$, der hier zu untersuchen ist, folgt $k^2\varepsilon^2 x^2 = (k^2 - 2px)(x^2 + y^2)$. Das passt schon fast zur Gleichung der **Konchoiden des Barons de Sluze** neben Bild 5.8 Seite 143 im Buch. Mit $c = \frac{k^2}{2p}$ erhalten wir nämlich $(c-x)(x^2+y^2) = -\,c\,\varepsilon^2\,x^2$, eine Sluze-Kurve.

Sortiert man das nach x^2- und y^2-Termen, so folgt gleich
$(c-x)y^2 = (x + c\,\varepsilon^2 - c)x^2$, eine **Cissoide** nach Gleichung 3.17 auf Seite 69 im Buch.

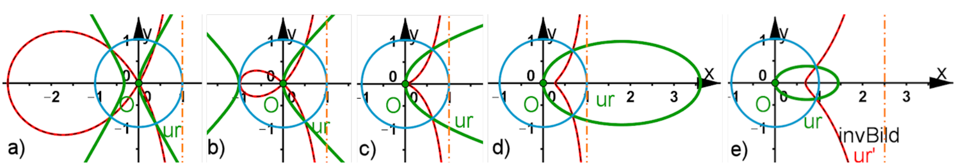

Abb. 9.25 **Aufgabe 9.12 Inversion der Kegelschnitte in Scheitellage** Bei a) bis d) ist $k = 1$, $p = \frac{1}{2}$, $c = 1$. Mit $\varepsilon = 2$ zeigt a) die Trisektrix, mit $\varepsilon = \sqrt{2}$ zeigt b) die Strophoide, mit $\varepsilon = 1$ zeigt c) die Cissoide des Diokles als Bild der Parabel. Mit $\varepsilon = 0.85$ zeigt d) das Bild einer Ellipse. Bei e) ist weiter $k = 1$ und $\varepsilon = 0.85$, das Bild dieser kleineren Ellipse mit $p = 0.2$ hat aber $c = 2.5$. Die Asymptote ist stets $x = c$.

In Abb. 9.25 ist gezeigt, für welche Werte der Parameter p und ε der Kegelschnitt in Scheitellage beim Invertieren am Einheitskreis (Radius $k = 1$) in eine Trisektrix, eine Strophoide und eine Cissoide des Diokles übergeht. Diese drei klassischen Kurven sind auf

Seite 143 im Buch auch schon als gemeinsame Kurven vom Sluze-Typ und Cissoiden-Typ nachgewiesen. Auch in Aufgabe 5.5 Seite 144 widmet sich diesem Zusammenhang.

Nicht alle Sluze-Kurven treten als Inversionsbilder von Kegelschnitten auf Für den Parameter p braucht braucht man hier nur positive Werte zu betrachten. Für negative p erhält man der y-Achse gespiegelte Formen und damit auch lediglich gespiegelte Inversionsbilder. Da $c = \frac{k^2}{2p}$ also positiv ist, ist auch $c\varepsilon^2 > 0$, das Minuszeichen in der Kurvengleichung bleibt erhalten. Das hat zur Folge, das die Sluze-Kurven mit $a \geq 0$ nicht auftreten können. Also kommen die Bögen auf der anderen Seite der Asymptote nicht als Inversionsbilder von Kegelschnitten in Scheitellage vor.

Nicht alle Cissoiden-Variationen aus Gleichung 3.17 von Seite 69 im Buch treten als Inversionsbilder von Kegelschnitten auf Abb. 3.23 im Buch zeigt i.W. die vorkommenden Cissoiden-Variationen. Ockerfarben sind links etliche, die man in der GeoGebra-Datei zur Inversion der Kegelschnitte nicht beobachten kann. Kandidaten für diese sind allenfalls Hyperbeln mit ihren Punkten links der y-Achse, da wir nur positive p betrachten. Die Inversion hat ja Urbild und Bild in demselben Quadranten. Hyperbeln aber haben unendlich ferne Punkte, daher müssen ihre Inversionsbilder den Ursprung erreichen. Die Cissoiden in Abb. 3.23 im Buch sind für $a = 2$ gezeichnet. Sie erfüllen für $c = 0$ die Gleichung $(x + 4)x^2 = -xy^2$. Dieses wird erfüllt von der Geraden $x = 0$ und dem Kreis $(x + 2)^2 + y^2 = 4$. Für negative c erreicht die stetige Kurve den Ursprung nicht mehr. Wie oben schon überlegt, können negative $c = \frac{k^2}{2p}$ nicht auftreten. Aber $c = 0$ ist auch nicht möglich, da $k = 0$ keine Inversion bietet und c nur für $p \to \infty$ gegen 0 strebt.

Definitionsbereiche Alle Hyperbeln, die ihren rechten Scheitel im Ursprung haben, werden invertiert zu einer Schlaufe mit der rechten Asymptote $x = \frac{k^2}{2p}$ und mit Knoten im Ursprung. Da die Äste ins Unendliche reichen, muss das auch so sein. Der Scheitel des Knotens ist das Bild des linken Hyperbelscheitels. Er liegt bei $x_0 = \frac{k^2\left(1-\epsilon^2\right)}{2p}$, also im Negativen für Hyperbeln, im Positiven bei Ellipsen, die nur einen bogenförmigen Ast als Bild haben. Bei Parabeln entsteht eine Spitze im Ursprung. Nur zwischen diesem Wert und der Asymptote gibt es Bildpunkte.