In: Kurven erkunden und verstehen
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.5.5 Inversion der Kegelschnitte als Aufgaben

Aufgabe 9.13 Inversion am Brennpunkt von Ellipse und Hyperbel
Wenn der Brennpunkt im Ursprung liegt, gibt es für die Kegelschnitte die allgemeine

$$\text{Polargleichung in Brennpunktlage} \qquad r(\theta) = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos(\theta)} \tag{9.9}$$

Bauen Sie mit Schiebereglern für p und ε Urbilder und invertieren Sie mit dem Button für die Kreisspiegelung. Stellen Sie eine Vermutung an, um welche Kurvenfamilie es sich handelt. Leiten Sie eine Gleichung der Inversionsbilder her. Beobachten Sie die Veränderung der Urbilder und Bilder bei Variation von ε.

Hinweis
Eine kartesische Gleichung ist $\left(x^2 + y^2 - 2c\,\varepsilon\,x\right)^2 = 4c^2\left(x^2 + y^2\right)$ ◀

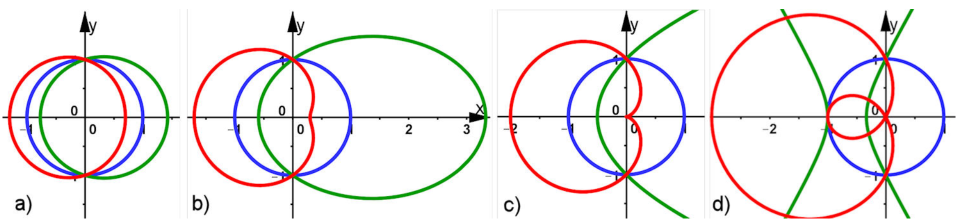

Abb. 9.26 **Aufgabe 9.13 Inversion der Kegelschnitte am Brennpunkt** Zu sehen ist der blaue Einheitskreis, an dem der grüne Kegelschnitt (mit $p = 1$) invertiert wird. Das Ergebnis ist die rote Pascalsche Schnecke. a) Ellipse mit $\varepsilon = 0.3$, zweiter Brennpunkt dicht an O $\rightarrow$ Oval, b) Ellipse mit $\varepsilon = 0.7$, zweiter Brennpunkt weiter außen $\rightarrow$ Oval mit Einbuchtung, c) Parabel, $\varepsilon = 1$ $\rightarrow$ Kardioide d) Hyperbel mit $\varepsilon = 2$ $\rightarrow$ Pascal'sche Schnecke mit Schlaufe.

Lösung Aufgabe 9.13 Wenn eine Polargleichung mit Pol O existiert, wie es hier der Fall ist, erhält man für die Inversion an einem Kreis mit dem Radius k die Kehrwertgleichung $r_i(\theta) = \frac{k^2}{r(\theta)}$. Das heißt schon gleich, dass man o. B. d. A. den Radius des Inversionskreises $k = 1$ setzen kann. Alle anderen Radien ergäben lediglich mit k^2 gestreckte Bilder.

Hier ist also mit $k = 1$ nun $r_i(\theta) = \frac{1-\varepsilon\,\cos(\theta)}{p} = \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{p}\cos(\theta)$. Vergleich mit Gleichung 3.5 $r_p(\theta) = 2a\cos(\theta) \pm k_p$ von Seite 47 im Buch ergibt, dass es sich um Pascalsche Schnecken handelt, deren Wanderkreis den Radius $a = \frac{\varepsilon}{2p}$ hat und bei der die Leinenlänge $k_p = \frac{1}{p}$ ist. In den GeoGebra-Dateien mit dem Titel „Extra" ist der Wanderkreis und zu einem Q auf dem Kegelschnitt auch sein Bild P und das zugehörige H auf dem Wanderkreis eingezeichnet.

Wenn bei einer Pascal'schen Schnecke die Leinenlänge gleich dem Durchmesser des Wanderkreises ist, erreicht man die Kardioide. Hier ist das also der Fall für $\frac{1}{p} = k_p = 2a = \frac{\varepsilon}{p}$, also für $\varepsilon = 1$, die Parabel. Dies ist schon in Abschnitt 9.5.2.3 erwähnt.

Herleitung der kartesischen Gleichung Mit der Grundgleichung 2.6 $r = \frac{x}{\cos(\theta)}$ ergibt sich aus der in der Aufgabe genannten Polargleichung beim Lösen nach r sofort $r = p + \varepsilon\, x$ und damit $x^2 + y^2 = (p + \varepsilon\, x)^2$ als **kartesische Gleichung aller Kegelschnitte in Brennpunktlage.** Man sieht für $x = 0$ kommt die Ordinate des Brennpunktes $y = \pm\, p$ heraus, wie es sein muss.

Wenden wir nun die kartesischen Inversionsgleichungen 9.22 von Seite 291 an, so erhalten wir zunächst $\frac{k^4}{x^2+y^2} = \left(p + \varepsilon \frac{k^2 x}{x^2+y^2}\right)^2$ und schließlich $k^4(x^2+y^2) == (p(x^2+y^2) + k^2 \varepsilon x)^2$. Mit $c = \frac{k^2}{2p}$ erreicht man fast die im Hinweis angegebene Gleichung. Mit $x \to -x$ spiegelt man noch an der y-Achse in die Lage der Pascalschen Schnecken aus Abb. 3.6 von Seite 47 im Buch.

Zusatz: Allgemeiner Kegelschnitt und sein Bild In Abschnitt 9.5.3.1 auf Seite 293 im Buch ist die allgemeine quadratische Form der Kegelschnitte angegeben und mit den Inversionsgleichungen am Kreis um O mit Radius k^2 invertiert. Dieses ermöglicht die GeoGebra-Datei „allg-keg-inv.ggb“.

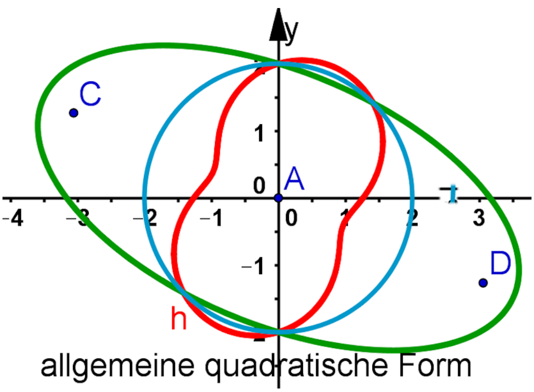

Abb. 9.27 **Aufgabe 9.13 Zusatz: Allgemeiner Kegelschnitt und sein Bild** Jeder beliebige, gedrehte, verschobene oder entartete Kegelschnitt kann mit seinen Parametern realisiert und invertiert werden.