In: # Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.5.5 Inversion der Kegelschnitte als Aufgaben

Aufgabe 9.14 Inversion am Mittelpunkt von Ellipse und Hyperbel
Mit den Halbachsen a und b von Ellipse und Hyperbel gilt:

$$\text{Mittelpunktsgleichung} \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9.10}$$

Bauen Sie mit Schiebereglern für a und b Urbilder und invertieren Sie mit dem Button für die Kreisspiegelung. Stellen Sie eine Vermutung an, um welche Kurvenfamilie es sich handelt. Leiten Sie eine Gleichung der Inversionsbilder her. Vergleichen Sie mit Aufgabe 4.7.

Hinweis
Eine kartesische Gleichung der Inversionsbilder ist $\left(x^2+y^2\right)^2 = \frac{k^4}{a^2}\,x^2 \pm \frac{k^4}{b^2}\,y^2$. ◀

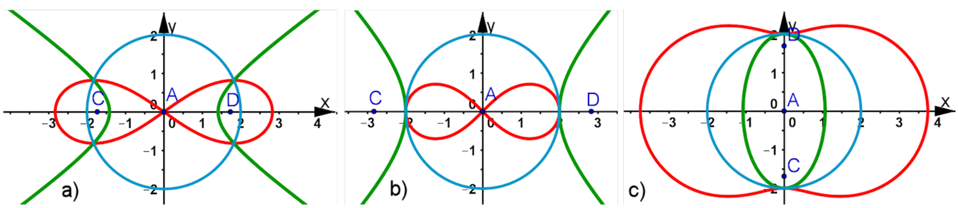

Abb. 9.29 Aufgabe 9.14 Inversion von Kegelschnitte in Mittelpunktslage a) Urbild Hyperbel $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, b) Urbild $x^2 - y^2 = 4$, c) Urbild $4x^2 + y^2 = 4$

Lösung: Dieses Mal macht die Anwendung der Abbildungsgleichungen 9.23 von Seite 291 keinerlei Mühe, sofort erhält man $\frac{k^4 x^2}{a^2(x^2+y^2)^2} + \frac{k^4 y^2}{b^2(x^2+y^2)^2} == 1$ und im nächsten Schritt die im Hinweis angegebene Gleichung. Vergleich mit der kartesischen Gleichung 4.31 von Seite 116 $\left(x^2+y^2\right)^2 = c^2\,x^2 \pm s^2\,y^2$ der Booth'schen Kurven zeigt, dass die **Ellipsen auf Booth'sche Ovale** und die **Hyperbeln auf Booth'sche Lemniskaten** abgebildet werden. Es gilt $c = \frac{k}{a}$ und $s = \frac{k}{b}$.

Speziell zeigt Abb. 9.29 b) die **Bernoulli'sche Lemniskate**, denn bei ihr erscheinen als Ursprungstangenten die beiden Winkelhalbierenden als Bilder der Asymptoten der Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$. Die Gleichung des Bildes ist $\left(x^2+y^2\right)^2 = 4\left(x^2-y^2\right)$, damit ist im Vergleich mit Gleichung 4.22 von Seite 108 im Buch $2e^2 = 4$, also ist liegen die Brennpunkte an den Stellen $e = \sqrt{2}$ und die Scheitelpunkte sind $(\pm 2, 0)$.
Das Bild bei a) ist: $(x^2+y^2)^2 = 8x^2 - 16y^2$, eine Booth'sche Lemniskate.
Das Bild bei c) ist: $(x^2+y^2)^2 = 16x^2 + 4y^2$, ein Booth'sche Oval.

In der GeoGebra-Datei ist für die Urbilder die Quadratische Form $a_1x^2 + a_2x\,y + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0$ vorgesehen, sie erlaubt auch gedrehte und verschobene Urbild-Kegelschnitte und Sonderfälle.