In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.5.6 Inversion von Kurven als Aufgaben

Aufgabe 9.15 Steiner-Kurve und ihre Inversion

Die Steiner-Kurve wird auch **Deltoid** genannt. In der aufrechten Form wie in Abb. 9.21 a) ist die Ähnlichkeit mit dem griechischen Δ überzeugend. Bei Abb. 9.3 (im Buch) steht die Parameterdarstellung 9.6 als Hypotrochoide und die explizite kartesische Gleichung, die hier günstig ist. Allerdings zeigt dann die obere Spitze nach rechts. Obiges Bild ist lediglich als „Image“ gedreht.

Anregungen: Versuchen Sie das gezeigte Bild nachzubauen, sehen Sie sich aber unbedingt auch die inversen Kurven der Steiner-Kurve an, die bei anderen Stellungen von M und anderen Werten von k entstehen. Es ist eindrucksvoll, wie diese dynamisch ineinander übergehen.

Hinweis

In Abb. 9.21 a) ist $\varrho = 0.85$ der Rollkreisradius, der Umkreis hat $R = 3\varrho$, $M = (-1, 0)$ und $k = 2$. Die GeoGebra-Datei finden Sie auf der Website zum Buch. ◀

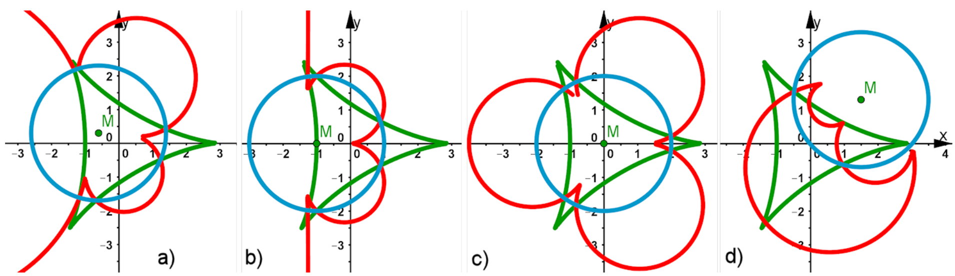

Abb. 9.30 Aufgabe 9.15 Inversion der Steiner-Kurve Die Steiner-Kurve ist das „Delta“ in Grün. Je nach Stellung und Radius des Inversionskreises ergeben sich verschiedene Bildkurven. a) $M = (-0.6, 0.3)$, b) $M = (-1, 0)$, c) $M = (0, 0)$, c) $M = (1.5, 1.3)$

Implizite kartesische Gleichung der Steiner-Kurve Mit der Herleitung der kartesischen Gleichung aus der Parameterdarstellung befasst sich ausführlich die Mathematica-Datei afg9.4-pedal-steiner.nb, für jedermann zu lesen als pdf-Datei. (In dieser Aufgabe 9.15 auf der Website verlinke ich sie nochmals.) Ich finde es immer wieder überraschend, in welch unterschiedlichen Gestalten Gleichungen derselben Kurve auftreten können: $(x-3)^3(\varrho+x)+y^2\left(18\varrho^2+24\varrho x+2x^2+y^2\right)=0$, auch $\left(9\varrho^2+12\varrho x+x^2+y^2\right)^2=4\varrho(3\varrho+2x)^3$ und $-27\varrho^4+18\varrho^2x^2-8\varrho x^3+x^4+18\varrho^2y^2+24\varrho xy^2+2x^2y^2+y^4=0$ sind solche Varianten der Schreibart für die Steiner-Kurve. GeoGebra zeigt im Algebrafenster die zuletzt gezeigte völlig aufgelöste Form an, mit ihr kann man auch die Übereinstimmungen nachweisen.

Inversion an einem Kreis um $M = (a, b)$ mit dem Radius k Aus praktischen Gründen heißt bei der Invertierung das Urbild P' und das Bild P, damit die endgültige Gleichung die Striche nicht mehr hat. Es wird nun der Inversionskreis in den Ursprung verschoben und mit ihm $P' \to \overline{P}'$, dann durch die übliche Inversion mit Gleichung 9.22 $\overline{P}' \to \overline{P}$, dann zurück $\overline{P} \to P$. Für x sind das nacheinander die Ersetzungen $x' \to \overline{x}' + a \to \frac{k^2\overline{x}}{\overline{x}^2+\overline{y}^2} + a \to \frac{k^2(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2} + a$. Entsprechend $y' \to \frac{k^2(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2} + b$.

Lösung von Aufgabe 9.15 Die Aufgabe fordert lediglich die Beschaffung der Inversionen der Steiner-Kurve. Das geht bekanntlich leicht mit dem Button Kreisspiegelung. So sind in GeoGebra die Bilder aus Abb. 9.30 (hier) erzeugt. Da die Steiner-Kurve zu den drei Achsen durch O und eine Spitze symmetrisch ist, lohnt es sich zu überlegen, mit welchen Stellungen von M man „alle Fälle“ sehen kann. M nur auf die x-Achse zu setzen, reicht offenbar nicht. Wie ist es mit M in einem Sektor zwischen der positiven x-Achse und der Geraden $y = \sqrt{3}x$? Was ist zu bemerken, wenn der Inversionskreis ganz außerhalb der Steiner-Kurve liegt?

Implizite kartesische Gleichung der invertierten Steiner-Kurve Die oben hergeleiteten Ersetzungen führen mit Mathematica und dem FullSimplify zu:

$$\left(\frac{k^2\left(-2a(a-x+6)+2b(y-b)+k^2+12x\right)}{(a-x)^2+(b-y)^2} + a(a+12) + b^2 + 9\right)^2$$
$$= 4\left(2\left(\frac{k^2(x-a)}{(a-x)^2+(b-y)^2} + a\right) + 3\right)^3$$

Von Hand ist das nicht empfehlenswert. Der der Knecht tut es klaglos.

In der Mathematica-Datei afg9.15-inv-steiner.nb und der zugehörigen *.pdf-Datei, die sich auf der Website befinden, können Sie sich überzeugen, dass diese „wilde“ Formel richtig ist. Die Bilder aus Abb. 9.30 (hier) erscheinen nun „selbst“ gerechnet. Natürlich hat GeoGebra intern ebenso diese erweiterten Inversionsgleichungen. Eine übersichtliche Gestaltung der Terme, wie sie oben von „FullSimplify“ vorgenommen wurde, ist nicht nötig bei der Darstellungsgeschwindigkeit heutiger Computer. GeoGebra löst, wie oben gesagt immer vollständig zu Polynomtermen in x und y auf.