

In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

9.5.6 Inversion von Kurven als Aufgaben

Aufgabe 9.16 Cassini'sche Kurven und ihre Inversion

Den bipolaren Kurven ist der große Abschnitt 4.3 gewidmet. Die beiden Abstände r und r' eines Kurvenpunktes von den beiden **Brennpunkten** erfüllen stets eine bestimmte Gleichung. Definition 4.3 auf Seite 99 im Buch zeigt die reichhaltigen Möglichkeiten. In dieser Aufgabe soll r' die dort erklärte Bedeutung behalten und wir nennen den Polarradius der invertierten Kurve jetzt r_i und den Radius des Inversionskreises k_i . Es gilt also $r \cdot r_i = k_i^2$. In den Polargleichungen dieser Aufgabe ist dann r durch $\frac{k_i^2}{r_i}$ zu ersetzen, **Fehlerteufel: Im Buch steht fälschlich ein Quadrat im Nenner!** Alle in der Definition 4.3 genannten Kurven sind bezüglich der *Inversion* ergiebig. Wir nehmen uns hier die **Cassini'schen Kurven** vor.

Zum Zeichnen eignet sich Gleichung 4.19 auf Seite 103 im Buch, aber für rechnerische Überlegungen ist die implizite Polargleichung 4.20 günstiger. Experimentieren Sie mit der Inversion der Cassini'schen Kurven.

Abb. ?? b) im Buch (oder 9.32 b) hier) zeigt anscheinend das Inversionsbild um 90° gedreht gegenüber dem Urbild. Berechnen Sie für festes e und k_i , ob es ein k gibt, für das diese Konstellation auftritt. Dann wäre diese spezielle Cassini'sche Kurve anallagmatisch i. w. S. Überlegen und prüfen Sie, welche grünen Kurvenstücke in welche roten übergehen.

Abb. ?? c) (oder 9.31 b) hier) zeigt die Inversion einer Cassini'schen Kurve, die **fast** auf dem Urbild liegt. Gibt es eine oder mehrere anallagmatische Cassini'sche Kurven? Nennen Sie eine (möglichst umfassende) Beziehung zwischen den Kurvenparametern k und e , für die es garantiert *keine* anallagmatischen Kurven gibt.

Variieren Sie, z.B. bei festem k_i und auch festem e , die Form der Cassini'schen Kurven, beobachten Sie das inverse Bild und achten Sie auf $k = e$. Beweisen Sie möglichst Ihre besondere Beobachtung auf irgendeine Weise.

Hinweis

Auf der Website zum Buch finden Sie die GeoGebra-Dateien und die Beweise. ◀

Lösung: Berechnung der Inversion der Cassini'schen Kurven Wir gehen an die Gleichung $(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = k^4 - e^4$ mit den Inversionsgleichungen $x \rightarrow \frac{k_i^2 x}{x^2 + y^2}$ und $y \rightarrow \frac{k_i^2 y}{x^2 + y^2}$ heran. Der erste Term wird durch Kürzen schön einfach: $k_i^8 \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)^2 - 2e^2 k_i^4 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = k^4 - e^4$ und es geht weiter mit $\frac{k^4 - e^4}{k_i^4} (x^2 + y^2)^2 + 2e^2(x^2 - y^2) = k_i^4$.

Suche nach anallagmatischen Fällen für $k > e$ In diesem Fall ist der Faktor vor dem ersten Summanden positiv. Tauschen wir im zweiten Summanden x und y so wird er: $-2e^2(x^2 - y^2)$. Hier liegt die Wurzel dafür, dass die Bildkurven für aufrecht stehen. Vollständige Übereinstimmung erreichen wir, wenn $\frac{k^4 - e^4}{k_i^4} = 1$, also bei einer Inversion mit dem Radius k_i , der $k_i^4 = k^4 - e^4$ erfüllt. Bei der Bilderserie hier sind einheitlich

$e = 3$ und der Inversionsradius $k_i = 2$ festgehalten. Bei Abb. 9.32 b) ist $k = \sqrt[4]{k_i^4 + e^4} = \sqrt[4]{2^4 + 3^4} = 3.14$ eingestellt. Dieses ist die beiden „Katzenzungen“ sind also kongruent und dieses ist damit ein **anallagmatischer Fall i. w. S.**

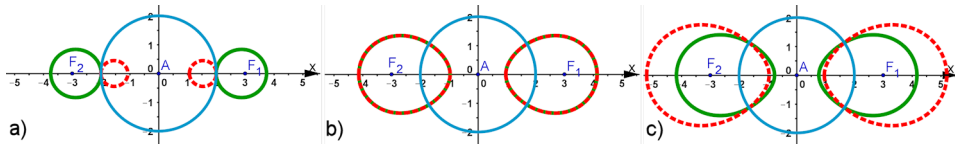


Abb. 9.31 Aufgabe 9.16 Inversion der Cassini'schen Kurven $k < e$ Für alle gilt $e = 3$ und $k_i = 2$. Dann ist bei a) $k = 2.24$ Berührung des Inversionskreises, b) $k = 2.84$ echt anallagmatischer Fall, c) $k = 2.9$ Für größer werdende k wandern die äußeren Scheitel nach außen

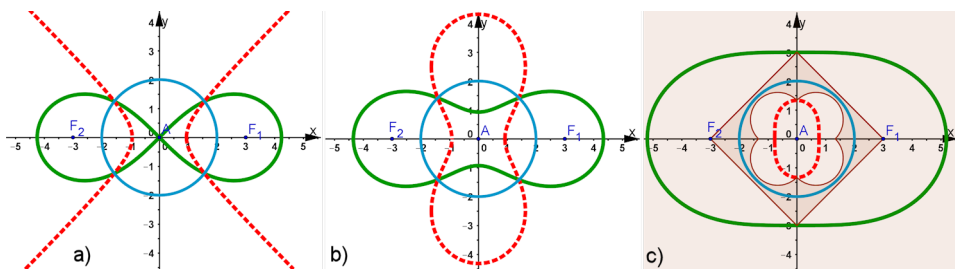


Abb. 9.32 Aufgabe 9.16 Inversion der Cassini'schen Kurven $k \geq e$ Für alle gilt $e = 3$ und $k_i = 2$. Dann ist bei a) $k = 3$ Bernoulli'sche Lemniskate mit der rechtwinkligen Hyperbel als Bild, b) $k = 3.14$ anallagmatischer Fall i. w. S., c) $k = 4.24$, von diesem k an haben die Cassini'schen Kurven keine Einbuchtung mehr.

Suche nach anallagmatischen Fällen für $k < e$ In diesem Fall ist der Faktor vor dem ersten Summanden negativ. Multiplikation mit -1 ergibt $\frac{e^4 - k^4}{k_i^4} (x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = -k_i^4$. Nun erreichen wir Übereinstimmung mit der Ausgangsgleichung durch $k_i^4 = e^4 - k^4$, denn vorn entsteht dann die gewünschte 1 und die rechte Seite wird $k^4 - e^2$, wie es sein muss. Darum haben wir mit $k = \sqrt[4]{e^4 - k_i^4} = \sqrt[4]{3^4 - 2^4} = 2.84$ die **einzig** „echt“-anallagmatische Cassini'sche Kurve für dieses Wertepaar (e, k_i) .

Überlegung zu anderen Werten von e und k_i Mit e und k wird die Form der Cassini'schen Kurve festgelegt. Zu jeder Form mit $e \neq k$ gibt es dann einen Inversionskreisradius aus obigen Formeln, der sie zur anallagmatischen Kurve macht, für $k < e$ „echt“, für $k > e$ in kongruenter, aufrechter Form.

Sonderfall $e = k$ Nun ist die Cassini'sche Kurve speziell die Bernoulli'sche Lemniskate. Sie hat als Inversionsbild die rechtwinklige Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ mit $a^2 = \frac{k_i^2}{2e^2}$. Die Lemniskate ist eine Cassini'sche Kurve, die für keinen Inversionskreisradius anallagmatisch ist.

Berührung des Inversionskreises In Abb. 9.31 a) erfüllt der innere rechte Scheitel die Gleichung $x^2 = e^2 - k^2$. Für Berührung muss gelten $e^2 - k^2 = k_i^2$, also $k = \sqrt{e^2 - k_i^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} = 2.24$

Einteilige Cassini'sche Kurven ohne Delle In Abb. 9.32 c) erfüllt der obere Scheitel auf der y-Achse die Gleichung $y = \sqrt{k^2 - e^2}$. Die Gerade durch diesen Scheitel schneidet die Kurve in $x = 0$ doppelt und in $x = \pm\sqrt{2}\sqrt{2e^2 - k^2}$. Die Diskriminante dieser äußeren Schnittstellen verschwindet für $k = \sqrt{2}e = 4.24$. Für größere k gibt es keine Delle mehr.

Dieser Zusammenhang ist durch das Quadrat mit seinen Ecken in $(\pm e, 0)$, den Brennpunkten, und $(0, \pm e)$ visualisiert. Wenn man dieses Quadrat mit dem Button „Kreis Spiegelung“ invertiert, wird das Innere nach außen gekehrt, aus der Quadratanten werden Kreisstücke.

Arbeiten mit der Polardarstellung Diese erweist sich wegen der impliziten Form der Polargleichung aus aufwändig. Die Gleichung $r^4 - 2e^2r^2 \cos(2\theta) = k^4 - e^4$ hat nämlich die Lösungen $r_1(\theta) = \sqrt{\frac{\sqrt{e^4 \cos(4\theta) - e^4 + 2k^4}}{\sqrt{2}} + e^2 \cos(2\theta)}$ und $r_2(\theta) = \sqrt{\frac{\sqrt{2e^2 \cos(2\theta) - \sqrt{2}\sqrt{e^4 \cos(4\theta) - e^4 + 2k^4}}}{\sqrt{2}}}$. Die mit k_i^2 multiplizierten Kehrwerte sind dann die Polargleichungen der invertierten Kurven. Von Hand ist das unerquicklich, aber Mathematica macht es für Abb. 9.33 klaglos.

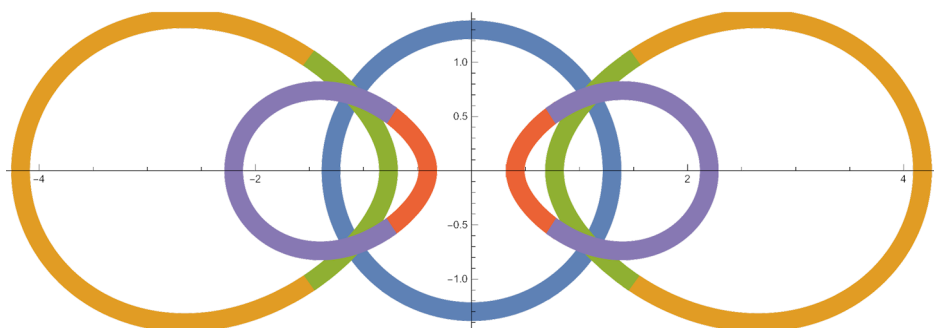


Abb. 9.33 Aufgabe 9.16 Inversion mit der Polarform der Cassini'schen Kurven für $e = 3$, $k = 2.9$ und $k_i = 1.3$. Urbilder sind die violetten und roten Bögen aus dem 1. und 2. Term. Deren inverse Bilder sind die gelben und grünen Bögen. Punkte innerhalb des blauen Inversionskreises haben ihre Bilder außen und umgekehrt. Bild und Urbild sind stets auf demselben Radiusstrahl auf derselben Seite des Ursprungs.

Die Untersuchung, welche Kurventeile welche Bilder haben, lässt sich in GeoGebra auch interaktiv untersuchen durch einen zugfesten Punkt Q auf einer Cassini'schen Kurve und dessen mit dem Button „Kreis Spiegelung“ erzeugten Bild P . Hat man Bildkurve und Urbildkurve, sieht man aber auch „mit bloßem Auge“ auf dem (gedachten) Radiusstrahl, welches das Bild eines Punktes sein kann.