

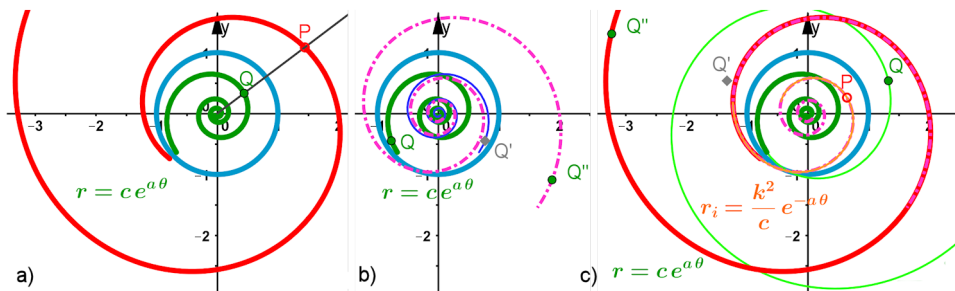
# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, Website zum Buch

## 9.5.6 Inversion von Kurven als Aufgaben

### Aufgabe 9.17 Königin der Spiralen und ihre Inversion

Von der von Bernoulli wegen ihrer vielfältigen Reproduzierbarkeit so geschätzten logarithmischen Spirale  $r(\theta) = ce^{a\theta}$  wird gesagt, sie sei *anallagmatisch*, reproduziere sich auch bei der Inversion selbst. Untersuchen Sie dies, siehe Abb. 9.21 d), und beachten Sie die Erweiterung des Begriffs, durch die nachfolgende Kongruenzabbildungen zugelassen werden. Lesen Sie dazu auch die Abschnitte 8.1.2 und 8.1.5 zur *spira mirabilis*.



**Abb. 9.34** Aufgabe 9.17 Königin der Spiralen (die *spira mirabilis*, logarithmische Spirale, Exponentialspirale, Bernoulli’sche Spirale ) und ihre Inversion

- a) Die Ur-Spirale innerhalb des Inversionskreises wird nach Außen abgebildet,
- b) die Ur-Spirale wird an der y-Achse gespiegelt und dann mit dem Faktor  $f = \frac{k^2}{c^2} e^{-a\pi}$  gestreckt, letzteres ist nach Gleichung 8.5 und 8.6 Seite 227 im Buch eine Drehung um  $\delta = \pi - \frac{1}{a} \ln(\frac{k^2}{c^2})$ .
- c) zeigt, dass die mit der Kongruenzabbildung b) erzeugte violette Spirale genau zu der invertierten Spirale passt. Also ist die **Königin der Spiralen anallagmatisch** i. w. S.

**Lösung:** Der wahrlich herausragenden Spirale mit den vielen Namen sind im Buch sechs Seiten gewidmet. Als „i-Tüpfelchen“ betrachten wir nun ihre Inversion. Wie bei allen Polarkurven ist ihr Inversionsbild schnell hingeschrieben: zu  $r(\theta) = ce^{a\theta}$  gehört  $r_i(\theta) = \frac{k^2}{c} e^{-a\theta}$ . Hier steht wieder eine Exponentialfunktion, darum gehört das Inversionsbild zu derselben Familie der Königin-Spiralen. In Abb. 9.34 a) (hier) ist in Grün ein Stück aus dem Urbild zu sehen, das ganz im Inversionskreis liegt. Es ist  $c = 0.5$  und  $a = 1,6$ . Das Bild davon liegt dann ganz außerhalb, Bild und Urbild würden sich bei  $\theta = -\frac{\ln c}{a} \approx 4.4$  schneiden, das Ende ist bei  $\theta_{ende} = 3.9$  gewählt. Die rote Bildkurve ist mit dem Button „Kreisspiegelung“ erzeugt. In Abb. c) ist das Urbild in Hellgrün und das Bild in Orange gemäß der obigen Formel für  $r_i$  verlängert.

**Die Königin ist anallagmatisch** in weiterem Sinne, d. h. nach Abschnitt 9.5.4 auf Seite 291 im Buch, dass das Inversionsbild durch eine **Kongruenzabbildung** mit dem Urbild zur Deckung gebracht werden kann. Das soll im Folgenden gezeigt werden.

Dazu wird zunächst das Urbild mit dem Button „Geradenspiegelung“ an der  $y$ -Achse gespiegelt in das blaue Spiralenstück in Bild b). Einen zunächst freien Streckfaktor  $f$  kam man interaktiv wachsen lassen, bis das gestreckte Bild auf dem Inversionsbild liegt. Dieses ist in Bild b) durch den (zugfesten) Punkt  $Q$ , seinen grauen Spiegelpunkt  $Q'$  und den zentrisch gestreckten Punkt  $Q''$  verdeutlicht.

Aber auch die Berechnung dieser Abbildung ist möglich:

Die **Spiegelung an der  $y$ -Achse** erreichen wir durch Vorzeichenwechsel bei  $x$ , dabei bleibt  $y$  bestehen. Sollen das mit  $f$  gestreckte Spiegelbild und das Inversionsbild übereinstimmen, so muss gelten  $x = -f \cdot r(t) \cos(t) = r_i(u) \cos(u)$  und  $y = f \cdot r(t) \sin(t) = r_i(u) \sin(u)$ . Division dieser beiden Gleichungen ergibt  $\frac{y}{x} = \tan(u) = -\tan(t) = \tan(-t + n\pi)$ , woraus  $u = -t + n\pi$  folgt. Für  $n = 0$  ergibt sich nichts Sinnvolles, aber  $n = 1$  führt zu dem durch Interaktion etwa bestimmten Wert:

Die Gleichung  $-f \cdot c e^{at} \cos(t) = \frac{k^2}{c} e^{at-a\pi} \cos(-t + \pi)$  und  $f \cdot c e^{at} \sin(t) = \frac{k^2}{c} e^{at-a\pi} \sin(-t + \pi)$  führt wegen  $\cos(-t + \pi) = -\cos(t)$  und  $\sin(-t + \pi) = \sin(t)$  schließlich zu dem **exakten Streckfaktor**  $f = \frac{k^2}{c^2} e^{-a\pi} \approx 2.43$ . Beide Gleichungen liefern dasselbe  $f$ .

Wegen der Streckung ist diese Gesamtabbildung eigentlich „nur“ eine Ähnlichkeitsabbildung und, da  $f \neq 1$  ist, keine Kongruenzabbildung. Das aber ist gerade das Fazinierende an der Königin der Spiralen, dass die Streckung nach dem blauen Kasten auf Seite 229 im Buch und Gleichungen 8.5 und 8.5 durch eine **Drehung** ersetzt werden kann. Der Drehwinkel steht in der Legende zu Abb. 9.34 (hier). Damit habe wir nun doch als Hintereinanderausführung von Geradenspiegelung und Drehung eine gesicherte **Kongruenzabbildung**. Also ist die **Königin der Spiralen anallagmatisch i. w. S.**