In: Kurven erkunden und verstehen
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.6.4 Kettenlinie, Kosinus- und Sinus hyperbolicus

Aufgabe 9.18 Kettenlinie

1. Berechnen Sie für die Kettenlinie Ableitung, Krümmung $\kappa(x)$ und Krümmungsradius $R(x)$. Verwenden Sie alle drei Aussagen von Gleichung 9.31
2. In der Form $a \cdot R(x) = f(x)^2$, die Sie aus dem vorigen Top erhalten, sehen Sie, dass Sie mit dem Höhensatz eine Konstruktion des Krümmungskreis-Mittelpunktes erfinden können. Tangente und Normale seien dabei für einen zugfesten Punkt P von GeoGebra beschafft. Sichern Sie Ihr Ergebnis durch die Evolute als Hüllkurve ab. Siehe dazu Abschnitt 9.3.
3. Bei Kettenlinien und Parabeln, die sich schneiden und denselben Scheitel haben, ist immer die Parabel im Scheitel „schlanker“. Sehen Sie sich das an weiteren Beispielen an und beweisen Sie diese Behauptung. Welche Folgen hat ein gleicher Scheitelkrümmungsradius?
4. Zeigen Sie, dass die Bogenlänge der Kettenlinie vom Scheitel bis zur Stelle x durch $s(x) = a\sinh(\frac{x}{a})$ gegeben ist. In Abb. 9.24 a) handelt es sich um die Kettenlinie mit $a = 0.4$ und $c = 1 - a$. Die Parabel ist $y = 2.87x^2 + 1$, der Eckpunkt hat die Ordinate 6. Vergleichen Sie die abgebildeten Längen.
5. Zeichnen Sie mit GeoGebra zu einer Kettenlinie die Evolvente, deren Spitze der Scheitel ist. Sie erhalten eine Traktrix. Realisieren Sie auch umgekehrt eine Traktrix und bilden Sie als Hüllkurve ihrer Normalen eine Kettenlinie. Also gilt: **Die Evolute einer Traktrix ist eine Kettenlinie**. Zur Traktrix lesen Sie Abschnitt 9.6.3, zu Evoluten und Evolventen die Abschnitte 9.2 und 9.3.3.
6. Blättern Sie jetzt einmal zurück zu Abschnitt 8.3.3, in dem der Brennpunkt einer abrollenden Parabel eine Kettenlinie erzeugt. Auch dieses ist ein Baustein für die Beobachtung: **In der Mathematik ist alles mit allem verwoben.**

Lösung zu 1.: Für $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ gilt $f'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$ und $f''(x) = \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ nach Gleichung 9.31. Für die Krümmung ergibt sich dann $\kappa(x) = \frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{a\sqrt{1+\sinh\left(\frac{x}{a}\right)^2}^3} = \frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{a\sqrt{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)^2}^3} = \frac{1}{a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a}{f(x)^2}$. Mit $R(x) = \frac{1}{\kappa(x)}$ erhalten wir $a \cdot R(x) = f(x)^2$.

Lösungs zu 2.: Der Höhensatz von Euklid für die Höhe h eines rechtwinkligen Dreiecks lautet $p \cdot q = h^2$ wobei p und q die Höhenabschnitte auf der Hypotenuse sind. Ein solches Dreieck mit der Höhe $h = f(x)$ und dem einen Hypotenusenabschnitt a ist in Abb. 9.27 in geschickter Lage konstruiert. Es liefert also als zweiten Hypotenusenabschnitt den Krümmungsradius $R(x)$.

Bauen Sie das nach – oder nehmen Sie die Datei von der Website – und setzen Sie den Spurmodus für die Normale, dann sehen Sie die Evolute auch als Hüllkurve der Normale, wie es sein muss.

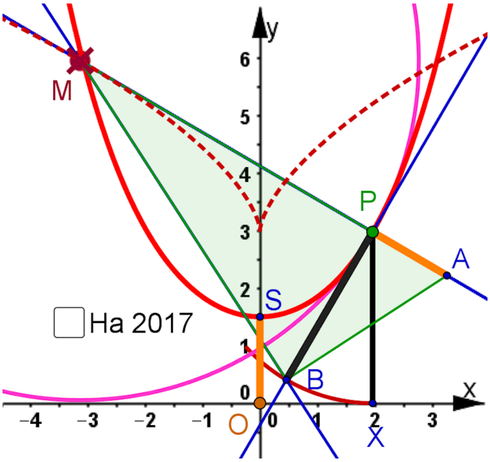

Abb. 9.27 Aufgabe 9.18 Kettenlinie und ihre Krümmung
Zu 2. Konstruktion: Erzeuge zu einem Punkt P auf der Kettenlinie mit GeoGebra die Tangente, die Normale und die (schwarze) Ordinatenstrecke. Trage diese auf der Tangente ab (B). Übertrage die Ordinate des Scheitels (orange) auf die Normale (A). Nun entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe $\overline{PB}$ und der einen Kathete $\overline{AB}$ durch eine Senkrechte in B auf AB. Diese schneidet AP in M und M ist der gesuchte **Krümmungskreismittelpunkt**.
Die Ortslinie von M bei Bewegung von P ist die **Evolute** (gestrichelt) der Kettenlinie.

Lösung zu 3.: Die Kettenlinie habe die Funktionsgleichung $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. Sie hat den Scheitel $S = (0, a)$ und dort nach Punkt 1. den Krümmungsradius $R_k(0) = a$. Damit ergibt sich der Krümmungskreismittelpunkt M_k übrigens als Spiegelpunkt des Ursprungs am Scheitelpunkt S.

Eine Parabel mit demselben Scheitel S (und derselben Symmetrieachse) hat die Gleichung $g(x) = \frac{1}{2p}x^2 + a$. Man verifiziert leicht als Funktion für den Krümmungsradius $rp(x) = \sqrt{p^2 + x^2}$, $rp(0) = p$ und $M_p = (0, a + p)$.

In Abb 9.28 a) und c) sind die Funktionen f und g gemeinsam dargestellt. Die Funktionen ihrer Krümmungsradien sind in b) und d) zu sehen. Dabei ist $r_k(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)^2$.

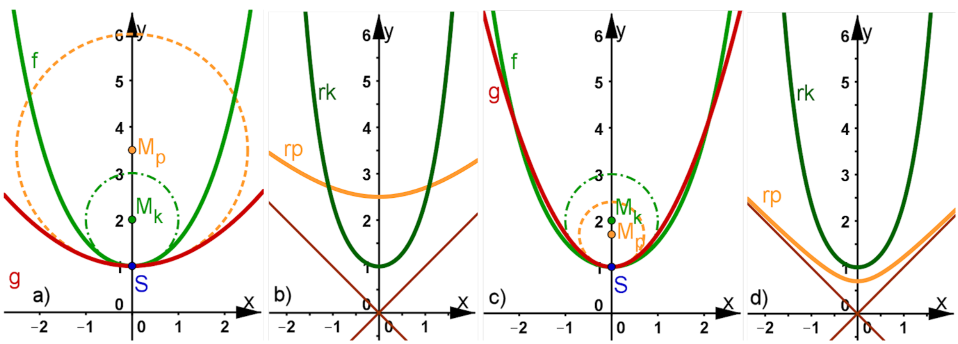

Abb. 9.28 Aufgabe 9.18 Parabel und Kettenlinie a) und b) mit $a = 1$ und $p = 2.5$. Die Parabel hat mit der Kettenlinie ausschließlich den Punkt S gemeinsam. Die Funktion rp ist eine Hyperbel mit den eingezeichneten Asymptoten $y = \pm x$ (für alle p). Der Krümmungsradius wächst letztlich nur linear, die Parabel kann sich nicht mehr zur Kettenlinie hin krümmen.
c) und d) mit $a = 1$ und $p = 0.7$. Die Parabel ist bei S schlanker als die Kettenlinie, aber die Funktion r_k ist, wie auch die Kettenlinie selbst, letztlich eine Exponentialfunktion, die bewirkt, dass die Kettenlinie die Parabel noch schneiden muss.

Die Krümmungsradien im Scheitel sind gleich für $a = p$. Für $0 < p < a$ gibt es zwei weitere gemeinsame Punkte von Kettenlinie und Parabel, für $0 < a \leq p$ ist der Scheitel der einzige gemeinsame Punkt.

Lösung zu 4.: Für die Bogenlänge der Kettenlinie verwenden wir die Ableitung aus Punkt 1. und erhalten $s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh\left(\frac{u}{a}\right)^2}\, d\,u = \int_0^x \cosh\left(\frac{u}{a}\right)\, d\,u = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$, wie zu zeigen war.

Für Abb. 9.24 a) konnte ich den tiefsten Punkt des Fotos der hängenden Kette in $S = (0, 1)$ platzieren, aber die Kettenlinie $\hat{f}(x) = 1 \cosh\left(\frac{x}{1}\right)$ passte nicht. Wie auf Seite 303 im Buch erklärt – und davor theoretisch begründet – ist ein weitere Parameter zur Anpassung nötig. Als Aufhängepunkt für die Kette ergab sich aus dem Foto $H = (1.32, 6)$. Mit Gleichung 9.35 folgt zunächst $a + c = 1$, also als Funktion für die Kettenlinie $f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + 1 - a$. Die Gleichung $f(1.32) = 6$ ist eine transzendente Gleichung, die von GeoGebra – wenn man x anstelle von a schreibt – mit dem Button $x \approx$ numerisch gelöst wird zu $a = 0.4$. Für eine Parabel mit $g(x) = b \cdot x^2 + 1$ erhalten wir ebenso aus der Gleichung $b \cdot 1.32^2 + 1 = 6$ nun $b = 2.87$.

Die Länge der Kette als Kettenlinie ist dann $s_k = 2 \cdot 0.4 \sinh\left(\frac{1.32}{0.4}\right) = 10.83$. Dagegen ist die Länge der Parabel $s_p = 2 \int_0^{1.32} \sqrt{1 + (2 \cdot 2.87x)^2} d\,x = 10.56$, erwartungsgemäß etwas kürzer.

Lösung zu 5.: Für die Kettenlinie wird wie in Abb. 9.10 auf Seite 274 auf der Tangente der von O gelaufene Weg abgetragen, wie es Abb. 9.29 b) (hier) zeigt.

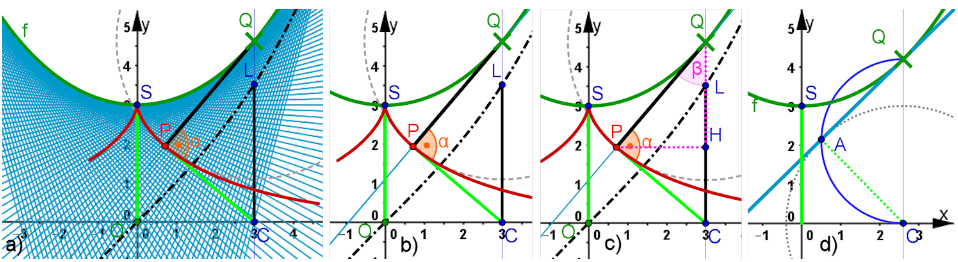

Abb. 9.29 **Aufgabe 9.18-5 Kettenlinie und Traktrix** Die Kettenlinie f ist als Funktion in Grün eingetragen, $f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. Die Traktrix ist in Rot zu sehen, sie existiert als Ortslinie. Die hellgrünen Strecken $\overline{SO}$ und $\overline{PC}$, auch $\overline{AC}$ in d), haben die Länge a. Die Weglänge von S nach Q auf der Kettenlinie ist nach Punkt 4. (oben): $s(x) = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$, die Funktion ist schwarz gestrichelt zu sehen. Die Ordinate von L (schwarze Strecke) ist auf der Tangente an die Kettenlinie in Q abgetragen und erzeugt P. Die Ortslinie von P ist damit eine **Evolvente der Kettenlinie**. Beweise für das Folgende liefert der Text.
a) Die Spur der Normalen der Evolvente hat als Hüllkurve die Kettenlinie.
b) Die beschriebene Konstruktion ist deutlich zu sehen.
c) Zu Beweis gehört das Steiungsdreieck (violett) der Tangente.
d) Zusatz: Mit dem Thalessatz lässt sich die Tangente an die Kettenlinie konstruieren. Die Spur auf $\overline{AC}$ ließe dann auch als Hüllkurve die Traktrix entstehen.

Beweis, dass P auf einer Traktrix liegt. Mit $Q = (u, v)$ haben wir $v = a\cosh\left(\frac{u}{a}\right)$. Die Gleichung der Tangente in Q ist wegen $f'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$ nun $y - v = \sinh\left(\frac{u}{a}\right) \cdot (x - u)$. Eine dritte Gleichung kann der grau gestrichelte Kreis mit dem Radius $s(u)$ in Abb. 9.29 b) liefern. Doch leider sind dieses alles transzendente Gleichungen in u, wir können nicht auf die sonst übliche Art u und v eliminieren. Wir können aber die Beziehung $1 + \sinh\left(\frac{u}{a}\right)^2 = \cosh\left(\frac{u}{a}\right)^2$ aus Gleichung 9.31 nutzen, wenn wir mit a^2 multiplizieren, haben wir nämlich $a^2 + s(u)^2 = v^2$. Dabei ist $s(u) = a\sinh\left(\frac{u}{a}\right)$ nach Punkt 4. dieser Aufgabe. Es gibt also ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und s und der Hypotenuse v. Wir müssen nur noch nachweisen, dass diese Hypotenuse auch wirklich die Richtung der Ordinate v hat, wie es in Bild b) erscheint.

Dazu betrachten wir den Winkel $\hat{\beta} = \angle PQC$ im genannten rechtwinkligen Dreieck: $\tan(\hat{\beta}) = \frac{a}{s} = \frac{a}{a\sinh\left(\frac{u}{a}\right)} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{u}{a}\right)}$.
In Bild c) haben wir mit violetten Katheten ein Steigungsdreieck der Tangente, in dem nach der zweiten obigen Gleichung gilt: $\tan(\beta) = \frac{u-x}{v-y} = \frac{x-u}{y-v} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{u}{a}\right)}$. Zusammen gilt also $\hat{\beta} = \beta$, die beiden Dreiecke passen so ineinander, wie es Abb. 9.29 c) (hier) zeigt.

Bezogen auf Abb. 9.23 im Buch S. 299 läuft C stets auf der x-Achse als „Tischkante“, P spielt die Rolle der „Uhr“ und die „Uhrkette“ hat die feste Länge a. Also ist die rote **Ortskurve von P tatsächlich die Traktrix**.

Zusatz: Konstruktion der Tangenten für die Kettenlinie Das oben vorgestellte rechtwinklige Dreieck QPC führt uns auch zu einer Konstruktion der Tangente in Q, die in Abb. 9.29 d) (hier) gezeigt ist: Gegeben ist die Kettenlinie mit $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ und ihr Graph in GeoGebra, darauf ein Punkt Q. Es sei C der Fußpunkt des Lotes von Q auf die x-Achse. Ein Kreis um C mit dem Radius a schneidet den Thaleshalbkreis in P. Dann ist QP die **gesuchte Tangente**.

Setzt man die Spur auf CP, so entsteht beim Ziehen von Q die Traktrix als Hüllkurve.
Kleine Anmerkung: Natürlich „braucht“ man eine solche Konstruktion nicht, GeoGebra oder eigene Rechnung liefert die Tangente ja gleich direkt. Aber ich finde den Zusammenhang einfach **schön**. Weder die Kettenlinie selbst noch die Traktix kann man elementar konstruieren, denn es sind beide transzendente Kurven. So ist dieser „Thales-Zusammenhang“ doch etwas Besonderes.

Anmerkung zu GeoGebra und der „Punktsprung“-Vermeidung Zieht man Q auf der Kettenline auf die andere Seite von S, so wird von dem Ortslinienwerkzeug i. d. R. anstelle des gewünschten P auf der Traktrix der andere Schnittpunkt gewählt, den der grau gestrichelte Kreis mit der Tangente gemeinsam hat. Um das zu vermeiden muss man im erweiterten Eigenschaftsmenu von GeoGebra den Haken bei „Kontinuität“ auf „An“ setzen. Dann wird auch der linke Teil der Traktrix als Ortslinie richtig angezeigt.

Das DGS Cinderella was das erste, das durch die Verwendung „homogener Koordinaten“ dieses Problem bewältigt hat. Wie genau es GeoGebra dann auch geschafft hat, entzieht sich meiner Kenntnis, aber es ist wichtig, dass man um diese Möglichkeit weiß.