# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

## 9.6.4 Kettenlinie, Kosinus- und Sinus hyperbolicus, räumlich

**Aufgabe 9.19 Katenoid als Minimalfläche**
Minimalflächen bilden sich z. B. als Seifenhäute zwischen Drähten. Im Mathematikum in Gießen kann man dazu Experimente machen. Drahtwürfel und andere Körper kann man in Seifenlauge tauchen und nach dem Herausziehen über die entstandenen Flächen staunen. Mathematisch sind die Minimalflächen im Allgemeinen nicht leicht zu bestimmen, zudem gehört das nötige Rüstzeug nicht in dieses Buch. Wenn sich die Seifenhaut zwischen zwei räumlich parallelen Kreisen spannt, entsteht ein Katenoid, also eine Rotationsfläche aus der Kettenlinie. In Abb. 9.35 c) (hier) ist es zu sehen. Die Aufgabe geht von der Gleichung der Kettenlinie $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ im Intervall $[-2, 2]$ aus.

Bestimmen Sie für eine Hyperbel $-a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ mit $a$ von der Kettenlinie den Parameter $b$ so, dass sie am Rand mit der Kettenlinie übereinstimmt. Bestimmen Sie entsprechend auch eine Parabel mit dem Scheitel $(0, a)$ und ein Polynom $y = c\,x^4 + a$ und prüfen Sie Ihre Ergebnisse in einem 2D-Koordinatensystem.

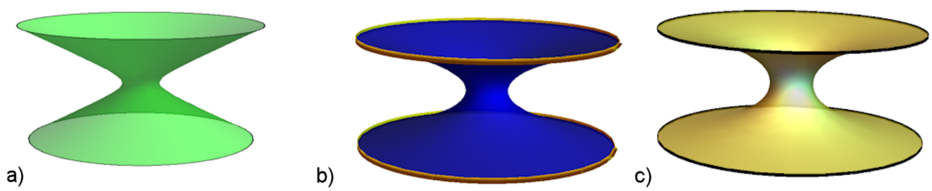


**Abb. 9.35** Rotationskörper, die x-Achse weist nach oben. **a) Hyperboloid, b) Paraboloid, c) Katenoid, die Minimalfläche**, sie wird von einer Seifenhaut zwischen den zwei Kreisen gebildet.

Wenn Sie unbändige Lust darauf haben, Ihre Analysis- und CAS-Fähigkeiten zu erproben, können Sie sich mit den Formeln 11.11 und 11.14 dem Volumen und der Mantelfläche dieser Körper widmen. Letzteres ist aber wirklich knifflig.

**Hinweis**
Auf der Website zum Buch ist alles durchgeführt. Zu den Volumina der Rotationskörper von Kegelschnitten lesen Sie evt. Abschnitt 5.3.6. Da bei diesen immer $y^2$ vorkommt, sind die betrachteten Integrale leicht zu lösen. ◀

**Lösung Aufgabe 9.19** Die Anpassungen der geforderten Funktionen bereitet keine Schwierigkeiten und geht aus der Legende zu Abb. 9.36 (hier) hervor. Wie schon im Buch erwähnt und in Aufgabe 9.18 noch extra untersucht wurde, ist die Parabel in so einer Anordnung im Scheitel schlanker als die Kettenlinie, die Hyperbel wirkt beinahe trichterförmig aber die Potenzfunktion ist deutlich breiter. Die 3D-Bilder in der Aufgabenstellung muss man um $90^o$ nach rechts drehen, dann geht es also nun um die Rotationkörper der betrachteten Funktionen um die x-Achse. Deren Volumina werden

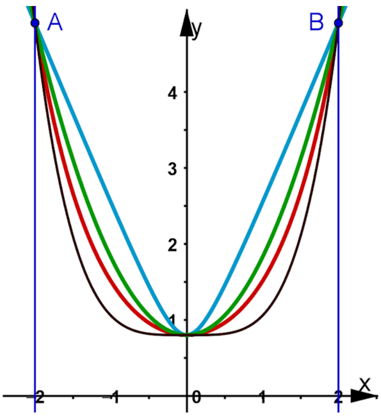


**Abb. 9.36 Aufgabe 9.19 Katenoid als Minimalfläche** Gezeigt sind vier Kurven mit demselben Scheitelpunkt und den gemeinsamen „Aufhängepunkten" $A$ und $B$ an den Stellen $\pm 2$. Die Ordinate muss dann $y_A = a \cosh\left(\frac{2}{a}\right) \approx 4.9$ sein, dabei ist für die Zeichnung $a = 0.8$ gewählt. Die Kurven sind:
**blaue Hyperbel** $y^2 = a^2\left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)$ mit $b^2 = \frac{4a^2}{y_A^2 - a^2} \approx 0.11$, also $b \approx 0.33$.
**grüne Parabel** $y = d\,x^2 + a$, mit $d = \frac{y_A - a}{4} \approx 1.03$
**rote Kettenlinie** $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$,
**schwarzes Polynom** 4. Grades. $y = c\,x^4 + a$, mit $c = \frac{y_A - a}{16} \approx 0.26$

$V_{poly} < V_{kette} < V_{parabel} < V_{hyperbel}$ erfüllen. Aber über deren Mantelflächen lässt sich durch „Hinsehen" nichts aussagen. Wir berechnen diese Größen in den folgenden Absätzen, die zugehörige Mathematica-Datei und ihre pdf-Version sind auf der Website verlinkt..

**Berechnung der Rotationsvolumnia** Wegen der Symmetrie zur y-Achse reicht es bei allen Funktionen, wenn wir die Grenzen von 0 bis 2 betrachten und den berechneten Wert verdoppeln. Mit der Formel (11.11) auf Seite 323 des Buches ergibt sich: $V = 2\pi \int_0^2 f(x)^2\, d\,x$.

**Hyperbel:** $V_{hyp} = 2\pi \int_0^2 a^2\left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right) d\,x = 2\pi a^2[2 + \frac{8}{b^2}]_0^2$. Bei $a = 0.8$ und $b$ aus der Bildlegende ergibt $V_{hyp} = 106.147$.

**Parabel:** $V_{para} = 2\pi \int_0^2 \left(d\,x^2 + a\right)^2\, dx$. Bei $a = 0.8$ und $d$ aus der Bildlegende ergibt $V_{para} = 77.9$.

**Kettenlinie:** $V_{kette} = 2\pi \int_0^2 a^2 \cosh\left(\frac{x}{a}\right)^2\, d\,x = 2\pi a^2\left[\frac{1}{4} a \sinh\left(\frac{2x}{a}\right) + \frac{x}{2}\right]_0^2$. Bei $a = 0.8$ ergibt sich $V_{kette} = 63.7$.

**Polynom:** $V_{poly} = 2\pi \int_0^2 \left(c\,x^4 + a\right)^2\, dx$. Bei $a = 0.8$ und $c$ aus der Bildlegende ergibt $V_{poly} = 48.1$.

**Berechnung der Mantelflächen** Wegen der Symmetrie zur y-Achse reicht es bei allen Funktionen, wenn wir die Grenzen von 0 bis 2 betrachten und den berechneten Wert verdoppeln. Die Formel habe ich aus dem dicken Buch: Arens et al. „Mathematik"(Springer): $M = 2 \cdot 2\pi \int_0^2 f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, d\,x$.

**Kettenlinie:** $V_{kette} = 4\pi \int_0^2 a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \sqrt{1 + \sinh\left(\frac{x}{a}\right)^2}\, d\,x$ mit der Beziehung 9.31 von Seite 301 im Buch wird der Integrand viel einfacher, nämlich $a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)^2$ und damit der partiellen Integration zugänglich. Schließlich wird $M_{kette} = 4\pi a\left[\frac{1}{4} a \sinh\left(\frac{2x}{a}\right) + \frac{x}{2}\right]_0^2 \approx 159.248$

Für die Integrale zu den anderen Funktionen muss sich ein Mensch heute seines Rechenknechtes CAS bedienen. Mir hat Mathematica folgendes geliefert (Datei ind pdf-Datei auf der Website): **Hyperbel:** $M_{hyp} = 161.78$, **Parabel:** $M_{para} = 159.53$, **Polynom:** $M_{oly} = 159.72$.

Tatsächlich hat das **Katenoid**, also die Mantelfläche, deren Berandung die Kettenlinie ist, die **kleinste Fläche**. Die Unterschiede sind aber als relative Abweichungen ausgedrückt $1,6\%$, $0.18\%$, $0.3\%$ und damit recht klein. Wohlgemerkt: niemand muss die Randfunktionen realisieren, denn für die Form sorgt „die Physik“ mit ihren Minimalprinzipien.

Wie sagte doch Galilei: „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.“